

Math. P.

493⁶

Math. P. 493 lc

Schell

ALLGEMEINE THEORIE
DER
CURVEN DOPPELTER KRÜMMUNG

IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG.

ALGEBRAISCHE THEORIE

VON

CURTES DOBBELTTER KÄRMÄNUNG

IN SEIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG

ALLGEMEINE THEORIE
DER
CURVEN DOPPELTER KRÜMMUNG

IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG.

VON

DR. WILHELM SCHELL,

AUSSERORDENTL. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
ZU MARBURG.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1859.

520-A.

ALLGEMEINE THEORIE
DER
CURVEN DOPPELTER KRÜMMUNG
IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1853

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
Capitel I. Die Curve in Verbindung mit der Geraden und Ebene; Tangente und Tangentenebenen, Normalen und Normalebene, Schmiegungeebene und Hauptnormale, rectificirende Ebene und Binormale, sowie die durch diese Geraden und Ebenen erzeugten Flächen. Ausgezeichnete Elemente der Curven.	3
- II. Contingenzwinkel, Schmiegunzwinkel, Winkel der ganzen Krümmung. Die Krümmungen der Curve und ihre Radien.	13
- III. Die Tangentenfläche und die Evolventen	26
- IV. Die Fläche der Krümmungsaxen und die Evoluten	34
- V. Die Schmiegunskugel und der gerade Schmiegungskegel .	43
- VI. Die rectificirende Fläche	51
- VII. Die Fläche der Hauptnormalen oder Krümmungshalbmesser	62
- VIII. Die Fläche der Binormalen	80
- IX. Die Schmiegunghelix	82
- X. Die cyclificirenden Flächen	86
- XI. Die Evolutoiden	96
Schluss	105

Inhalt.

Einführung	1
Capitel I. Die Curve in Verbindung mit der Geraden und Ebene: Tan- genten und Tangentenabschnitte, Normale und Normalenab- stände, Schmiegungsebene und Hauptnormale, rechtwinklige Ebenen und Bismutale, sowie die durch diese Geraden und Ebenen erzeugten Flächen. Ausgewählte Beispiele der Curven	3
II. Continuationswinkel, Schlingenzahlen, Knoten der ganzen Kriimmung. Die Kriimmung der Ebene	13
III. Die Tangentenabschnitte und die Kriimmung	26
IV. Die Fläche der Kriimmungsebene und die Kriimmung	31
V. Die Schmiegungsebene und die Fläche der Schmiegungsebene	43
VI. Die rechtwinklige Fläche	54
VII. Die Fläche der Hauptnormale oder Kriimmungsebene	62
VIII. Die Fläche der Bismutale	69
IX. Die Schmiegungsebene	85
X. Die evolutiven Flächen	86
XI. Die Evoluten	98
Schluss	105

Jede continuirliche Punktreihe heisst eine Curve; fallen alle ihre Punkte in ein und dieselbe Ebene, so wird sie eine ebene Curve genannt, wenn nicht eine Curve im Raume oder eine Curve doppelter Krümmung. Der Begriff der Curve doppelter Krümmung ist der umfassendere und schliesst den der ebenen Curve ein.

Um die Eigenschaften einer Curve in irgend einem ihrer Punkte zu untersuchen, bringt man sie mit andern Linien und Flächen in gewisse Verbindungen, nämlich mit der Geraden und Ebene, dem Kreise und der Schraubenlinie, mit der Kugel, der Kegelfläche und andern Flächen zweiten Grades, aus deren Lage gegen die Curve und deren Dimensionen sich Schlüsse auf die Beschaffenheit der Curve selbst in jenem Punkte ziehen lassen. Um aber den Verlauf der Curve in ihrer ganzen Ausdehnung zu übersehen, untersucht man die Flächen und Linien, welche durch die Gesammtheit aller in den einzelnen Punkten construirten Geraden, Ebenen, Kreise, Schraubenlinien, Kugeln etc. erzeugt werden. Die gegenseitigen Beziehungen dieser neuen Flächen und Linien unter einander und zur Curve selbst, sind sehr geeignet, eine deutliche Vorstellung von der Beschaffenheit der Curve in ihrem ganzen Verlaufe zu geben.

Auf diese Art können die Eigenschaften der Curven, welche allen gemeinsam sind, untersucht werden. Die speziellen Eigenschaften gewisser Curvengattungen, der ebenen, sphärischen, conischen, cylindrischen etc., überhaupt der Curven, welche auf bestimmten Flächen liegen, ergeben sich aus der allgemeinen Untersuchung durch Zufügung der speziellen Bedingungen, welchen die Punkte dieser Flächen genügen. Auch die Eigenschaften der Curvensysteme, d. h. der Schaaren der Curven, welche nach einem bestimmten Gesetze aufeinander folgen, oder was dasselbe ist, die Eigenschaften der krummen Flächen können hieraus gefolgert werden.

In der vorliegenden Schrift sollen blos die allgemeinen Eigenschaften der Curven entwickelt werden; sie soll eine allgemeine

Theorie der Curven doppelter Krümmung bieten. Die Untersuchung von speziellen Curvengattungen, sowie die Verallgemeinerung der Curventheorie zu einer Theorie der Flächen schliessen wir aus; nur Einzelnes über spezielle Curven werden wir als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Lehren hie und da heranziehen.

Die Methode, deren wir uns bedienen, wird rein geometrischer Natur sein; wir werden die Curven an sich untersuchen und ihre Eigenschaften nicht aus den Eigenschaften ihrer Projectionen ableiten. Daher werden wir die Rechnung mit Gleichungen der Curven durchaus vermeiden und uns nur einiger Sätze aus den Elementen des geometrischen Differentiirens, nämlich einiger Sätze über unendlich kleine sphärische Dreiecke bedienen. Diese Hilfsmittel genügen, um alle allgemeinen Fragen zu lösen. Bei der nicht unbedeutenden Schwierigkeit, welche die analytische Theorie der Curven doppelter Krümmung, d. h. die Darstellung aller Elemente, von denen die Natur einer Curve abhängt, durch symmetrische Functionen der Coordinaten und deren Differentialien darbietet, scheint es wünschenswerth zu sein, eine genaue Einsicht in Das zu erlangen, was die reine Geometrie auf dem Gebiete der Curventheorie durch die Methode des Unendlichkleinen geleistet hat. Wir tragen kein Bedenken, diese Methode in allen unsern Untersuchungen anzuwenden und können Denjenigen nicht beistimmen, welche die Behandlung der Curven mit Hülfe des Calculs für eleganter und strenger halten. Wer die abgekürzte Sprache der Methode des Unendlichkleinen versteht, weiss, dass durch sie derselbe Grenzenübergang geometrisch bewirkt wird, den die Differentiation und Integration analytisch erreicht.

Die Analysis und die Geometrie bilden heutzutage allerdings nur zwei Theile einer einzigen grossen Wissenschaft, der Theorie der continuirlichen Grösse; sie unterstützen sich gegenseitig, und weder darf der Analyst die Hilfsmittel der Geometrie noch der Geometer die der Analysis verschmähen. Allein so wenig dem ersteren eine rein geometrische Demonstration seiner Sätze genügen kann, sowie er suchen muss, diese selbstständig zu beweisen und die Geometrie nur als Interpreten heranziehen darf, ebenso wenig kann der Geometer bei der rein analytisch geführten Untersuchung einer räumliche Gegenstände betreffenden Frage stehen bleiben, sondern er muss dahin streben, seine Sätze unabhängig von aller Rechnung zu beweisen und diese nur als eine Verification von anderer

Seite betrachten. Den Analysten scheint diese Ansicht geläufiger zu sein, als den Geometern; denn gar mancher Satz über Curven und Flächen ermangelt noch heute eines rein geometrischen Beweises. In dieser Richtung wenigstens für die Theorie der Curven einen Beitrag zu liefern, ist die Aufgabe dieser Schrift.

Cap. I.

Die Curve in Verbindung mit der Geraden und Ebene; Tangente und Tangentenebenen, Normalen und Normalebene, Schmiegungeebene und Hauptnormale, rectificirende Ebene und Binomale, sowie die durch diese Geraden und Ebenen erzeugten Flächen. Ausgezeichnete Elemente der Curven.

§. 1. Die sämtlichen Geraden, welche durch einen Punkt M einer Curve gehen, bilden einen Strahlenbüschel im Raume. In diesem findet sich eine Schaar Gerader vor, von denen jede ausser durch M , noch durch wenigstens einen andern Punkt der Curve geht. Diese Schaar bildet eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt M und für welche die Curve selbst eine Leitlinie ist. Ist die Curve eben, so reducirt sich diese Fläche auf die Ebene der Curve. Durch jeden von M verschiedenen Punkt M' der Curve geht wenigstens ein Strahl MM' der Kegelfläche. Nähert sich nun der Punkt M' dem Punkte M und rückt er über ihn hinaus auf die andere Seite desselben, so passirt der Strahl MM' eine gewisse Grenzlage. Die Gerade, welche die Grenzlage des Strahles MM' angiebt, welche dieser bei seiner Drehung um den Punkt M im Momente des Durchganges des Punktes M' durch den Punkt M erreicht, heisst die Tangente der Curve im Punkte M und der Punkt M selbst ihr Berührungspunkt. Jeder andere Strahl MM' des Kegels, welcher wenigstens zwei nicht zusammenfallende Punkte M, M' der Curve enthält, heisst eine Secante der Curve und der Abstand MM' zweier solcher Punkte eine Sehne derselben.

Wenn die Secante in die Tangente übergeht, so verschwindet die Sehne MM' zugleich mit dem Curvenbogen, der durch ihre Endpunkte geht. Bei diesem Uebergange gehen die Eigenschaften der Secante in Eigenschaften ihrer Grenze, in Eigenschaften der Tangente über. Um die näheren Umstände dieses Ueberganges deutlicher erkennen zu können, betrachtet man die Secante kurz vor ihrem Eintritt in die Tangente. Die abgekürzte Sprache der Methode des Unendlichkleinen nennt die Secante bereits in dieser Lage Tangente und sagt, die Sehne und der Bogen MM' seien unendlich klein. Die Tangente wird nach dieser Ausdrucksweise erklärt, als die durch zwei unendlich nahe Punkte der Curve gezogene Gerade; die unendlich kleine Sehne MM' aber wird das Element der Curve im Punkte M genannt. Unter der Länge des Bogens einer Curve zwischen zwei festen Punkten M und N versteht man nämlich die Grenze, welcher sich die Summe von n Sehnen MM' , $M'M''$, $M''M'''$, ... $M^{(n-1)}N$, die man erhält, wenn man zwischen M und N die $n-1$ Punkte $M', M'', \dots M^{(n-1)}$ auf der Curve annimmt und den Punkt M mit M' , M' mit M'' , u. s. f. $M^{(n-1)}$ mit N durch Gerade verbindet, für wachsende n nähert. Diese Grenze wird durch ein bestimmtes Integral angegeben, dessen Elemente die Sehnen sind, welche sämmtlich verschwinden, wenn ihre Anzahl ins Unendliche wächst. Daher heisst die unendlich kleine Sehne MM' als das Element dieses Integrals, das Element des Bogens oder das Element der Curve.

§. 2. Jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt M der Tangente geht und zu dieser rechtwinklig ist, heisst eine Normale der Curve im Punkte M . Alle Normalen des Punktes M liegen in einer Ebene, welche im Berührungspunkte der Tangente senkrecht auf dieser steht, der Normalebene desselben. Eine Curve hat in jedem Punkte im Allgemeinen eine Tangente, aber unendlich viele Normalen, welche alle in einer Ebene liegen. Umgekehrt ist es bei den Flächen. Eine Fläche hat in jedem Punkte eine Normale, aber unendlich viele Tangenten, welche alle in eine Ebene fallen, nämlich in die Tangentenebene der Fläche. Durch eine Curve lassen sich unzählige Flächen legen; die Tangente der Curve ist eine gemeinschaftliche Tangente aller dieser Flächen und ihre Normalen sind Normalen der Curve. Daher liegt die Tangente der Curve in den Tangentenebenen aller dieser Flächen und ist ihr gemeinsamer Durchschnitt und liegen die Normalen der Flächen alle in einer Ebene, nämlich der Normalebene der Curve. Auf einer

Fläche kann man durch jeden Punkt unzählige Curven ziehen, die Tangentenebene der Fläche enthält die Tangenten aller dieser Curven und die Normalebenen aller Curven gehen durch eine Gerade, die Normale der Fläche. Die weitere Entwicklung des hier angedeuteten Dualismus zwischen Flächen und Curven hinsichtlich der zu ihren senkrechten Ebenen und Geraden ist Gegenstand der Theorie der Flächen und nicht der Theorie der Curven.

Projicirt man von irgend einem Punkte S des Raumes aus die Curve auf irgend eine Ebene durch eine Kegelfläche, so wird die Tangente eines Punktes M der Curve durch die Tangentenebene der Kegelfläche projicirt, welche diese Fläche längs des Strahles SM berührt. Diese Ebene ist Tangentenebene an die Kegelfläche in allen Punkten dieses Strahles und enthält also die Tangenten aller Curven auf dieser Fläche in den Punkten, in welchen sie den Strahl SM schneiden. Sie enthält also auch die Tangente der Projection der Curve auf jene Ebene, denn diese ist der Schnitt des Kegels mit ihr. Daher ist die Tangente der Projection einer Curve identisch mit der Projection ihrer Tangente. Dieser Satz besteht auch noch dann, wenn die Curve statt auf eine Ebene auf irgend eine krumme Fläche projicirt wird, oder wenn der Projectionspunkt S ins Unendliche rückt, also der projicirende Kegel in einen Cylinder übergeht und selbst noch dann, wenn die Curve durch irgend eine abwickelbare Fläche projicirt wird, welche weder Kegelfläche noch Cylinderfläche ist.

§. 3. Jede Ebene, welche durch die Tangente eines Punktes M einer Curve geht, heisst eine Tangentenebene der Curve im Punkte M und dieser Punkt ihr Berührungspunkt. Die sämtlichen Tangentenebenen eines Punktes bilden einen Ebenenbüschel, dessen Axe die Tangente ist. Durch jeden von M verschiedenen Punkt M'' der Curve geht wenigstens eine Ebene dieses Büschels. Wenn ihr Durchschnitt M' mit der Curve sich dem Berührungspunkte M nähert und über ihn hinausrückt auf die andere Seite der Curve, so passirt bei diesem Durchgange die Tangentenebene eine gewisse Grenzlage. Die Ebene, welche diese Grenzlage angiebt, heisst die Schmiegungeebene (Krümmungsebene, Osculationsebene) der Curve im Punkte M und dieser ihr Berührungspunkt. Diese Ebene ist die Tangentenebene des Kegels in §. 1, welche diesen längs der Tangente der Curve berührt. Da die Tangente des Punktes angesehen werden kann als die Secante, welche diesen Punkt mit einem ihm unendlich nahen Punkt M' ver-

bindet, und da der Punkt M'' , wenn er an M unendlich nahe herandrückt, auch dem Punkt M unendlich nahe kommt, so kann die Schmiegungebene angesehen werden, als die Grenzlage einer durch M geführten Schnittebene der Curve, von deren Durchschnittspunkten mit der Curve wenigstens drei M, M', M'' in einen (M) zusammenfallen. Da die Secanten, welche durch M und M' und durch M' und M'' gehen, als Tangenten in den Punkten M, M' zu betrachten sind, so kann die Schmiegungebene auch als die Ebene gelten, welche durch die Tangenten zweier unendlich nahen Punkte M, M' hindurchgeht.

§. 4. Jede Tangentenebene einer Curve schneidet die Normalebene des Berührungspunktes in einer Normalen; insbesondere schneidet die Schmiegungebene die Normalebene in einer Normalen, welche den Namen der Hauptnormalen des Punktes M führt. Diejenige Tangentenebene, welche zur Schmiegungebene und folglich auch zur Hauptnormalen rechtwinklig ist, heisst nach Lancret*) die rectificirende Ebene und ihre Durchschnittslinie mit der Normalebene, nämlich die zur Hauptnormalen senkrechte Normale, nennen wir mit Saint-Venant**) die Binormale des Punktes M .

§. 5. In jedem Punkte M einer Curve schneiden sich zufolge der §§. 1—3 drei zu einander rechtwinklige Gerade, die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale. Sie sind die Durchschnitte dreier gleichfalls zu einander rechtwinkliger Ebenen, der Normalebene, der Schmiegungebene und der rectificirenden Ebene. Die Normalebene enthält die Hauptnormale und Binormale, die Schmiegungebene die Hauptnormale und Tangente, die rectificirende Ebene die Tangente und Binormale. Lässt man diese Ebenen und Geraden in continuirlichem Zuge so an der Curve hingleiten, dass sie in jedem Punkte derselben ihren Charakter behalten, so erzeugen sie eine Reihe neuer Flächen und Curven, welche mit der primitiven Curve in einer sehr intimen Beziehung stehen. Jede der drei Ebenen erzeugt nämlich eine abwickelbare Fläche, welche von ihr während der ganzen Bewegung berührt wird und jede der drei Geraden beschreibt eine gleichfalls gradlinige Fläche, welche aber nur für die Tangente eine abwickelbare ist. Die Art und Weise, wie diese Flächen sich bilden, ist folgende.

§. 6. Es sei $M, M', M'', M''', M^{IV}, \dots$ eine Reihe Punkte der

*) Cf. Lancret, Mém. sur les courbes à double courbure. (Mém. prés. T. I. p. 420.)

**) Cf. Saint-Venant, Mém. sur les lignes courbes non planes. (Journ. de l'école polytechn. T. XVIII. p. 17.)

Curve; durch je drei unmittelbar aufeinanderfolgende derselben legen wir der Reihe nach die Ebenen $MM'M'$, $M'M'M''$, $M'M''M'''$, $M'M'''M^{IV}$, $\dots$, welche sich aufeinanderfolgend in den Geraden $M'M'$, $M'M''$, $M''M'''$, $M'''M^{IV}$, $\dots$ schneiden. Diese Folge von Ebenen bildet eine gewisse einfache polyedrische Figur, deren Ecken auf der Curve liegen, deren Kanten die Verbindungslinien dieser Ecken paarweise aufeinanderfolgend genommen und deren Flächen die Verbindungsebenen derselben Punkte paarweise aufeinanderfolgend genommen sind. Die gebrochene Linie $MM'M''M'''$ $\dots$ bildet auf diesem Polyeder eine Kantenreihe. Bilden wir nun eine neue Reihe von Punkten auf der Curve, indem wir zwischen je zwei aufeinanderfolgende der vorhandenen, je einen oder mehrere neue einschalten, und construiren aus der Reihe, welche von sämmtlichen alsdann vorhandenen Punkten gebildet wird, auf dieselbe Weise wie vorhin ein Polyeder, dann mit Hülfe einer weitem Einschaltung von Punkten ein drittes u. s. f., so nähern sich diese Polyeder immer mehr einer krummen Fläche als Grenze. Die Kanten gehen, weil die Punkte der Curve sich immer näher rücken, in die Tangenten, die Flächen in die Schmiegungebenen und die Kantenreihe geht in die Curve selbst über. Diese Fläche enthält die sämmtlichen Tangenten der Curve und wird längs diesen von den Schmiegungebenen berührt; diese sind also grade Erzeugungslinien derselben. Sie enthält auch die Curve selbst, welche auf ihr eine scharfe Kante bildet und von den Erzeugungslinien berührt wird.

Dreht man die Fläche $MM'M''$ des Polyeders um ihre Durchschnittslinie $M'M'$ mit der folgenden $M'M'M''$ so lange um, bis sie mit dieser coincidirt, dann die so vereinigten Ebenen um den Durchschnitt $M''M'''$ mit der folgenden Ebene $M''M'''M^{IV}$ bis sie mit dieser zusammenfallen u. s. f., so wird die Oberfläche des Polyeders nach und nach zu einer Ebene ausgebreitet oder abgewickelt.

Da diese Eigenschaft von der Zahl und Lage der Seitenflächen unabhängig ist, so geht sie beim Uebergange des Polyeders in die Fläche mit auf diese über. Daher ist sie abwickelbar. Diese Fläche, deren Wendecurve oder Gratlinie (*arête de rebroussement*) die Curve selbst ist, soll, als der Ort aller Tangenten, die Tangentenfläche der Curve heissen. Es wird sich später zeigen, dass sie zugleich der Ort aller Filarevolventen der Curve ist. Auf den Tangentenebenen dieser Fläche stehen die Binormalen senkrecht und in diesen Ebenen liegen die Hauptnormalen der Curve *).

*) Durch continuirliche Bewegung einer Ebene, wenn sie nicht in einer Rotation der Ebene um eine feste Axe besteht, wird stets eine abwickel-

§. 7. Die Normalebene erzeugt eine abwickelbare Fläche, die sie berührt und die wir die Envelope der Normalebenen nennen wollen. Da die Normalebenen zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' auf den Tangenten dieser Punkte und in Folge dessen auch auf der durch sie hindurchgehenden Schmiegungebene des einen von ihnen (M) senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie senkrecht auf dieser Ebene. Diese Durchschnittslinie ist aber die grade Erzeugungslinie der Envelope; es hat diese Fläche mithin die Eigenschaft, dass alle ihre Erzeugungslinien auf den Schmiegungebenen der Curve senkrecht stehen. Die Durchschnittslinie der Normalebene des Punktes M mit der Normalebene des folgenden Punktes heisst die Krümmungsaxe des Punktes M , weil sie mit der Krümmung der Curve in sehr genauer Beziehung steht. Daher führt die Envelope der Normalebenen auch den Namen der Fläche der Krümmungsaxen. Zwei aufeinander folgende Krümmungsaxen schneiden sich in einem Punkte, weil sie beide Durchschnittslinien einer Normalebene mit der ihr unmittelbar vorhergehenden und folgenden Normalebene sind. Ihr Durchschnitt ist der den drei Normalebenen gemeinsame Punkt, deren Durchschnitte sie selbst sind. Die Folge dieser Durchschnittspunkte der Krümmungsaxen bildet auf der Envelope die Gratlinie, welche von ihnen berührt wird. Die Fläche ist, wie sich zeigen wird, der Ort der Evoluten der Curve und ihre Gratlinie der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die Curve in der dritten Ordnung berühren. Ihre Erzeugungslinien laufen parallel den Binormalen und sind zu

bare Fläche erzeugt. Denn wenn die bewegliche Ebene sich um einen unendlich kleinen Winkel gedreht hat, so schneidet sie in der neuen Position die vorhergehende Position längs einer Geraden, welche als Axe für diese Drehung angesehen werden kann. Ebenso schneidet sie in einer dritten Position die zweite in einer Geraden, der Axe für eine zweite unendlich kleine Drehung u. s. f. Dadurch entsteht eine continuirliche Folge von Geraden, von denen je zwei aufeinanderfolgende sich schneiden; denn sie sind die Durchschnittslinien der beweglichen Ebene mit ihrer vorhergehenden und ihrer folgenden Position und liegen also in ein und derselben Ebene. Ihr Durchschnitt ist der den drei Ebenen gemeinsame Punkt, deren Durchschnitte sie selbst sind. Die Intersectionen dieser Folge von Geraden bilden eine Curve, an welche diese Tangenten und die Folge der Ebenen Schmiegungebenen sind. Der Ort der Geraden ist aber eine Fläche, und da sie sich schneiden, eine abwickelbare Fläche. Die bewegliche Ebene berührt diese Fläche, weil sie immer durch zwei zusammenfallende (unendlich nahe) Erzeugungslinien hindurchgeht.

den Hauptnormalen, den Schmiegungebenen und den Tangenten rechtwinklig; in ihre Tangentenebenen fallen die sämtlichen Normalen der Curve.

§. 8. Die abwickelbare Fläche, welche die rectificirende Ebene erzeugt, heisst die rectificirende Fläche, weil sie die Eigenschaft hat, durch ihre Abwicklung die Curve in eine Gerade zu verwandeln. Die Durchschnittslinie zweier aufeinander folgender rectificirender Ebenen ist die grade Erzeugungslinie der Fläche und wird die rectificirende Gerade genannt. Sie ist senkrecht zu zweien aufeinanderfolgenden Hauptnormalen. Da nämlich die rectificirende Ebene senkrecht steht auf der Hauptnormalen, so ist auch jede in ihr liegende Gerade zu ihr senkrecht. Nun liegt die rectificirende Gerade gleichzeitig in zwei aufeinanderfolgenden rectificirenden Ebenen, also ist sie zu gleicher Zeit senkrecht auf den beiden aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, zu welchen diese senkrecht sind. Die rectificirende Gerade ist wohl zu unterscheiden von der Binormalen; beide liegen in der rectificirenden Ebene, aber die Binormale steht nur auf einer Hauptnormalen, dagegen aber noch auf der Schmiegungebene senkrecht, während die rectificirende Gerade auf zwei Hauptnormalen, aber nicht auf der Schmiegungebene senkrecht steht. Die rectificirende Fläche besitzt eine Gratlinie, welche von sämtlichen rectificirenden Geraden berührt wird und deren Schmiegungebenen die rectificirenden Ebenen sind. In diesen Ebenen liegen die Binormalen und ihnen parallel laufen die Krümmungsaxen.

§. 9. Die drei Geraden, die Tangente, Hauptnormale und Binormale erzeugen drei Flächen, von denen nur die, welche die Tangente beschreibt, abwickelbar ist. Sie ist nämlich die in §. 6 erwähnte Tangentenfläche der Curve. Die Fläche der Hauptnormalen, welche auch die Fläche der Krümmungshalbmesser heisst, weil diese die Richtung der Hauptnormalen haben, wie sich im Verlaufe zeigen wird, ist windschief. Es liegen nämlich die Hauptnormalen zweier aufeinander folgender Punkte M , M' in zwei verschiedenen Ebenen, nämlich den Schmiegungebenen dieser Punkte und gehen nicht durch denselben Punkt der Durchschnittslinie dieser, folglich fallen sie nicht in dieselbe Ebene, mithin schneiden sie sich nicht und erzeugen also eine windschiefe gradlinige Fläche. Sie können daher auch nicht Tangenten einer Curve, d. h. Verbindungslinien aufeinander folgender Punkte derselben sein. Nur in einem Falle erleidet dieser Satz eine Ausnahme, nämlich

dann, wenn je zwei aufeinanderfolgende, mithin alle Schmiegungebenen zusammenfallen. Dann ist die Curve eben, ihre Hauptnormalen fallen alle in ihre Ebene und berühren die in der Ebene der Curve liegende Evolute derselben.

Die Fläche der Binormalen ist gleichfalls windschief. Zwei aufeinander folgende Binormalen stehen nämlich auf zwei aufeinander folgenden Schmiegungebenen senkrecht und gehen nicht beide zugleich durch denselben Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen oder der Tangente; sie können sich daher nicht schneiden und erzeugen folglich eine windschiefe Fläche. Nur in einem Falle geht diese Fläche in eine abwickelbare über, nämlich wenn je zwei aufeinanderfolgende Schmiegungebenen, also alle Schmiegungebenen zusammenfallen, d. h. wenn die Curve eben ist.

§. 10. Den §§. 6—9 zufolge hat man mit einer Curve fünf Flächen in Verbindung zu denken: die Tangentenfläche, die Enveloppe der Normalebenen, die rectificirende Fläche, die Fläche der Hauptnormalen und die Fläche der Binormalen. Von diesen sind die drei ersten abwickelbar, die beiden letzten windschief. Die Curve selbst ist der gemeinsame Durchschnitt der Tangentenfläche, der rectificirenden Fläche und der Fläche der Hauptnormalen, während die Enveloppe der Normalebenen nicht durch die Curve hindurch geht. Die drei abwickelbaren Flächen besitzen drei Gratlinien, unter denen die Curve selbst ist, sie ist nämlich die Gratlinie der Tangentenfläche.

§. 11. Ist die Curve eben, so fallen alle Schmiegungebenen mit der Ebene der Curve zusammen. Die Fläche der Tangenten geht über in diese Ebene; die Enveloppe der Normalebenen wird ein Cylinder, weil die Krümmungsachsen alle auf der gemeinsamen Schmiegungeebene aller Punkte der Curve senkrecht stehen; die Fläche der Binormalen wird gleichfalls ein Cylinder, weil die Binormalen den Krümmungsachsen parallel laufen; die rectificirende Fläche fällt mit dem Cylinder der Binormalen zusammen, denn die rectificirenden Ebenen und folglich auch die rectificirenden Geraden stehen alle auf der gemeinsamen Schmiegungeebene senkrecht und die Fläche der Hauptnormalen reducirt sich auf die Ebene der Curve, weil die Hauptnormalen alle in die Schmiegungebenen fallen.

Ist die Curve sphärisch, so sind die Tangenten sämtlich Tangenten an die Kugel, auf welcher die Curve liegt; mithin gehen alle Normalebenen und folglich auch alle Krümmungsachsen durch deren Mittelpunkt. Daher ist die Enveloppe der Normalebenen eine

Kegelfläche und reducirt sich ihre Gratlinie auf einen Punkt, den Mittelpunkt der Kugel.

§. 12. Punkte, Tangenten, Schmiegungebenen, Normalebenen, Binormalen, etc. einer Curve, welche eine besonders ausgezeichnete Lage oder sonst ausgezeichnete Eigenschaften besitzen, heissen ausgezeichnete oder singuläre (besondere) Punkte, Tangenten, Schmiegungebenen etc. Die Eigenthümlichkeiten dieser Elemente pflanzen sich auf die von ihnen abhängigen übrigen Elemente, Flächen und Linien fort, die mit der Curve in Beziehung stehen.

Lässt man einen beweglichen Punkt über die Curve hinlaufen, so bewegt sich gleichzeitig mit ihm die Tangente und Schmiegungeebene und zwar bewegt sich der Punkt in der Tangente (ändert seine Lage gegen einen festen Punkt in dieser), die Tangente in der Schmiegungeebene (ändert ihre Lage gegen eine feste Gerade in dieser) und die Schmiegungeebene im Raume (ändert ihre Lage gegen eine feste Ebene des Raumes); es dreht sich dabei die Tangente um den Berührungspunkt in der Schmiegungeebene und die Schmiegungeebene um die Tangente. Ändert der bewegliche Punkt in einem Punkte der Curve den Sinn seiner Bewegung in der Tangente (nimmt sein Abstand von einem festen Punkte in ihr ab, während er vorher zunahm oder umgekehrt), so heisst dieser ein Rückkehrpunkt, ändert die Tangente den Sinn ihrer Drehung in der Schmiegungeebene, so heisst sie eine Rückkehrtangente und ändert die Schmiegungeebene den Sinn ihrer Drehung um die Tangente, so ist sie eine Rückkehrebene der Curve *). Hinsichtlich dieser besonderen Elemente sind nun für irgend eine Stelle der Curve folgende 8 Combinationen möglich, wobei der Buchstabe r bedeuten soll, dass ein Element ein Rückheherelement, während o bedeutet, dass dasselbe kein Rückheherelement ist:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Punkt:	o	o	o	o	r	r	r	r
Tangente:	o	o	r	r	o	o	r	r
Schmiegungeebene:	o	r	o	r	o	r	o	r

Im Falle 1. ist der Punkt ein gewöhnlicher Punkt der Curve ohne besondere Eigenthümlichkeiten, im Falle 2. hat die Tangentenfläche einen Wendestrahle, die Schmiegungeebene schneidet diese Fläche

*) Cf. v. Staudt, Geometrie der Lage §. 205. p. 113.

in der Tangente, diese Fläche und mit ihr die Curve tritt von der einen Seite der Schmiegungeebene auf die andere über. Der Punkt der Curve ist ein Wendepunkt. Im dritten Falle hat die Tangentenfläche eine Schärfe, ebenso im 4., nur ist die Tangente zugleich Wendestrahle, im 5. bildet die Curve eine Spitze, bleibt aber auf derselben Seite der Schmiegungeebene, desgl. im 6., nur tritt sie auf die andere Seite der Schmiegungeebene über, die Fälle 7. und 8. sind denen 5. und 6. analog.

§. 13. Es kann der Fall eintreten, dass ein Punkt, oder eine Tangente oder eine Schmiegungeebene der Curve ins Unendliche rückt. Entfernt sich die Schmiegungeebene ins Unendliche, so geschieht dasselbe mit der Tangente und deren Berührungspunkt; entfernt sich die Tangente ins Unendliche, so rückt auch der Berührungspunkt unendlich weit fort, ohne dass die Schmiegungeebene nothwendig dasselbe thut; rückt der Punkt der Curve ins Unendliche, so können Tangente und Schmiegungeebene im Endlichen bleiben. Bezeichnen wir das Fortrücken eines Elementes ins Unendliche mit dem Zeichen ∞ , während o die Lage desselben im endlichen Raume bedeutet, so sind folgende 3 Fälle möglich

Punkt:	∞	∞	∞
Tangente:	∞	∞	o
Schmiegungeebene:	∞	o	o

Im ersten Falle ist die Tangente, sowie die Schmiegungeebene unbestimmt, im zweiten Falle nähert sich die Curve fortwährend einer festen Ebene, aber in dieser ist die Tangente unendlich fern, also unbestimmt, im dritten Falle nähert sich die Curve fortwährend einer festen Ebene und in dieser einer festen Grade. Diese Ebene heisst eine Asymptotenebene und die Grade in ihr eine Asymptote der Curve.

Jeder dieser drei Fälle kann in Verbindung mit jedem der 8 obigen Fälle eintreten, so dass also die Curve hinsichtlich ihrer unendlich fernen Elemente, wenn blos Punkte, Tangenten und Schmiegungeebenen berücksichtigt werden, 24 Arten von Eigenthümlichkeiten haben kann.

§. 14. Es giebt noch verschiedene Degenerationsfälle anderer Art. Bildet eine Curve eine Schlinge und zieht sich diese in einen Knoten zusammen, so fallen mehrere Punkte in einen zusammen. Ein solcher Punkt heisst ein vielfacher Punkt und es gibt in ihm im Allgemeinen ebenso viel Tangenten und Schmiegungeebenen,

als Punkte zusammenfallen, oft aber fallen auch mehrere dieser Elemente selbst zusammen aber werden auch wol unbestimmt.

Reducirt sich ein Curvenast auf einen Punkt (Einsiedler), so wird die Tangente und Schmiegungeebene unbestimmt.

Fallen mehrere der unter den acht Fällen (§. 12) verzeichneten Punkte zusammen, so erlangt ein solcher eine Combination von besonderen Eigenschaften der zusammenfallenden Punkte, einige Eigenschaften verschwinden in der Regel, indem sie sich paarweise vernichten. Fallen z. B. mehrere Wendepunkte zusammen, so hängt es von der graden oder ungraden Beschaffenheit ihrer Anzahl ab, ob der Gesamtpunkt ein Wendepunkt wird, oder nicht.

Berührt eine Tangente oder Schmiegungeebene eine Curve in 2, 3, ... Punkten, so heisst sie eine Doppeltangente, dreifache Tangente etc., doppelte, dreifache Schmiegungeebene u. s. w. Eine Doppeltangente liegt in zwei Schmiegungeebenen, die auch in eine doppelte Schmiegungeebene zusammenfallen können.

Cap. II.

Contingenzwinkel, Schmiegunzwinkel, Winkel der ganzen Krümmung. Die Krümmung der Curven und ihre Radien.

§. 1. Der unendlichkleine Winkel, welchen die Tangenten eines Punktes M der Curve mit der Tangente des folgenden Punktes M' bildet, heisst der Contingenzwinkel der Curve im Punkte M . Er liegt in der Schmiegungeebene; er wird auch von den Normalebeneben der Punkte M, M' gebildet, da diese zu den Tangenten dieser Punkte senkrecht sind. Nun sind die Normalebeneben Tangentenebenen an die Fläche der Krümmungsaxen und zugleich die Schmiegungeebenen der Gratlinie dieser Fläche. Daher ist der Winkel der Schmiegungeebenen zweier aufeinanderfolgender Punkte

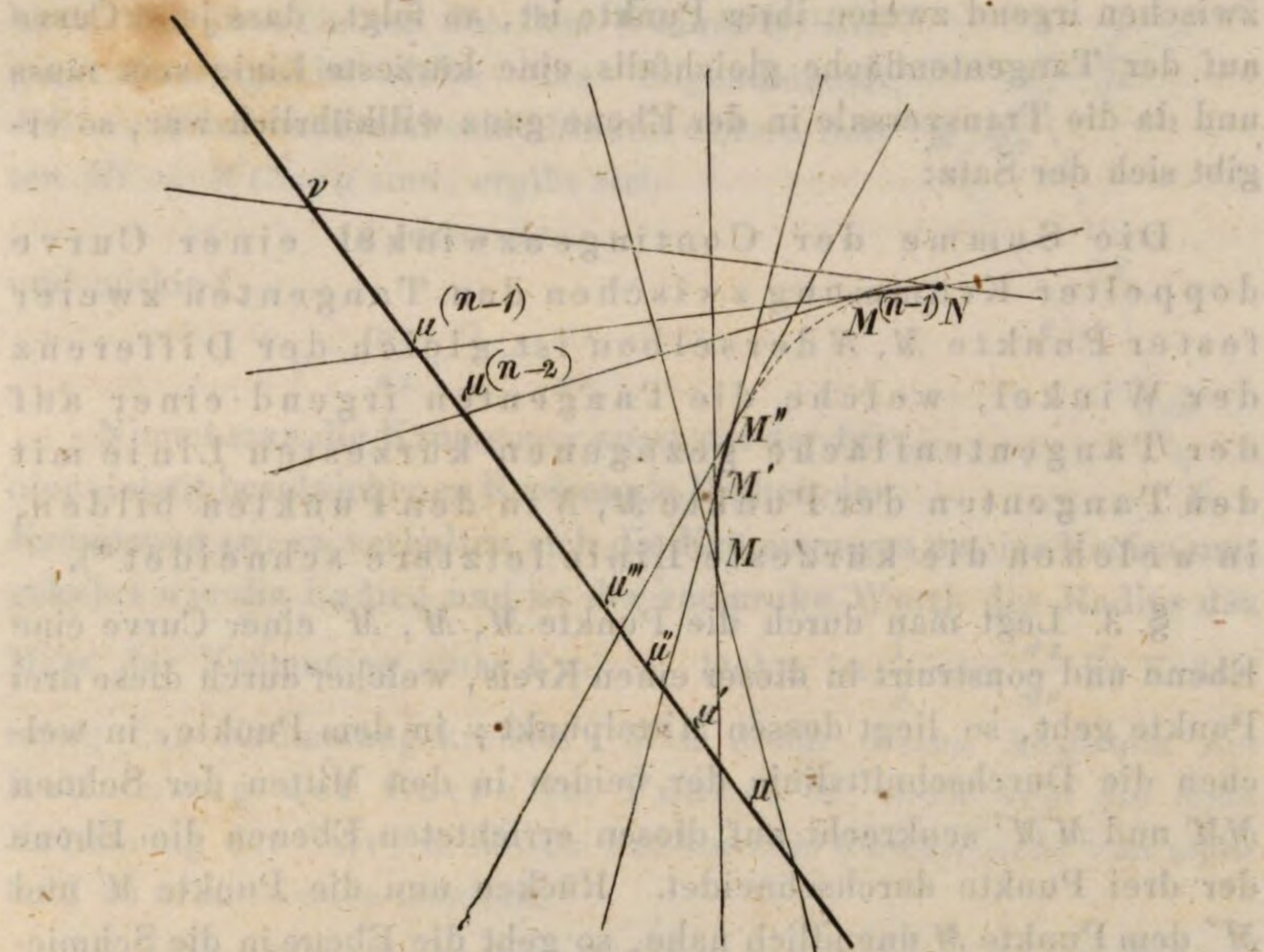
der Gratlinie der Fläche der Krümmungsaxen gleich dem Contingenzwinkel der primitiven Curve.

Die Normalebene des Punktes M , M' und ihre Durchschnitts-
linie, die Krümmungsaxe des Punktes M stehen gleichzeitig senk-
recht auf der Schmiegungeebene von M , in welcher die beiden Tan-
genten liegen. Sie schneiden diese Ebene in zwei zu den Tangenten
senkrechten Graden, welche im Durchschnitt C der Krümmungsaxe
mit der Schmiegungeebene zusammenlaufen. Diese Geraden bilden
mit einander den Neigungswinkel der Normalebene, d. h. ihr Win-
kel ist gleich dem Contingenzwinkel. Von diesen Geraden ist aber
nur die eine (MC) eine Hauptnormale, nämlich die Durchschnitts-
linie der Normalebene des Punktes M mit der Schmiegungeebene
desselben Punktes, die andere $M'C$ nicht. Denn die folgende Haupt-
normale ist die Durchschnittsline der Normalebene des Punktes M'
mit dessen Schmiegungeebene, $M'C$ ist aber die Durchschnittsline
dieser Normalebene mit der Schmiegungeebene des Punktes M . Diese
Linie ist bloss die senkrechte Projection der zweiten Hauptnormale
auf die erste Schmiegungeebene.

§. 2. Es kann leicht die Summe τ der Contingenzwinkel einer
Curve gefunden werden, welche von den aufeinanderfolgenden Tan-
genten der Curve zwischen zwei festen Punkten M und N gebildet
werden. Schalten wir zu dem Ende $n-1$ andere Punkte $M', M'',$
 $M''', \dots M^{(n-1)}$ zwischen M und N ein, so nähert sich die Schaar der
Geraden, welche durch M und M', M'' und M'', M'' und $M''',$ u. s. f.
gehen, immer mehr der Schaar der Tangenten in den Punkten $M,$
 $M', M'', \dots M^{(n-1)}, N$ und die Schaar Ebenen durch $M, M', M''; M',$
 $M'', M'''; \dots$ der Schaar der Schmiegungeebenen der Punkte von M
bis N und die Winkel, welche die aufeinanderfolgenden Geraden
mit einander bilden, werden die Contingenzwinkel der Punkte $M,$
 $M', M'' \dots N$. Letztere bezeichnen wir als Elemente der Summe τ
der Reihe nach mit $d\tau, d\tau', d\tau'', \dots d\tau^{(n-1)}, d\tau^{(n)}$. Die dadurch ent-
stehende Figur stellt in der Grenze den Theil der Tangentenfläche
dar, den eine bewegliche Tangente beschreibt, wenn sie aus der
Lage der Tangente in M durch alle Zwischenlagen in die Tangente
des Punktes N übergeht. Wickelt man nun diese Fläche ab, indem
man jede Schmiegungeebene (die Ebene eines Contingenzwinkels)
um die Tangente dreht, bis sie mit der folgenden Schmiegungeebene
zusammenfällt, so wird dadurch weder die Grösse der Contingenz-
winkel, noch die der Bogenelemente der Curve alterirt und es geht
die Curve doppelter Krümmung in eine ebene Curve über, welche

mit ihr gleiche Bogenelemente und gleiche Contingenzwinkel hat. Zieht man nun in der Ebene der abgewickelten Curve (Fig. 1) irgend

Fig. 1.



eine Gerade (Transversale), welche die Tangenten der Punkte $M, M', M'', \dots, M^{(n-1)}, N$ der Reihe nach in den Punkten $\mu, \mu', \mu'', \dots, \mu^{(n-1)}, v$ schneidet und mit diesen die Winkel $\mu, \mu', \mu'', \dots, \mu^{(n-1)}, v$ bildet, so ergibt sich jeder Contingenzwinkel als die Differenz zweier Winkel μ , welche die Transversale mit seinen Schenkeln bildet und man erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} d\tau &= \mu' - \mu \\ d\tau' &= \mu'' - \mu' \\ d\tau'' &= \mu''' - \mu'' \\ &\vdots \\ d\tau^{(n-1)} &= v - \mu^{(n-1)} \end{aligned}$$

und durch deren Addition die Summe der Contingenzwinkel nämlich

$$\tau = v - \mu$$

Die Punkte $\mu, \mu', \mu'' \dots$ der Transversalen bildeten vor der Abwicklung der Tangentenfläche auf dieser eine Curve, deren Tangenten gegen die Erzeugungslinien der Fläche unter den Winkeln μ geneigt

waren und durch die Abwicklung alle in eine Grade zusammenfallen. Da die Bogenlänge dieser Curve durch die Abwicklung nicht verändert wurde und die Grade in der Ebene eine kürzeste Linie zwischen irgend zweien ihrer Punkte ist, so folgt, dass jene Curve auf der Tangentenfläche gleichfalls eine kürzeste Linie sein muss und da die Transversale in der Ebene ganz willkürlich war, so ergibt sich der Satz:

Die Summe der Contingenzwinkel einer Curve doppelter Krümmung zwischen den Tangenten zweier fester Punkte M, N derselben ist gleich der Differenz der Winkel, welche die Tangenten irgend einer auf der Tangentenfläche gezogenen kürzesten Linie mit den Tangenten der Punkte M, N in den Punkten bilden, in welchen die kürzeste Linie letztere schneidet*).

§. 3. Legt man durch die Punkte M, M', M'' einer Curve eine Ebene und construirt in dieser einen Kreis, welcher durch diese drei Punkte geht, so liegt dessen Mittelpunkt γ in dem Punkte, in welchen die Durchschnittslinie der beiden in den Mitten der Sehnen MM' und $M'M''$ senkrecht auf diesen errichteten Ebenen die Ebene der drei Punkte durchschneidet. Rücken nun die Punkte M' und M'' dem Punkte M unendlich nahe, so geht die Ebene in die Schmiegungebene über und nimmt der Kreis und sein Mittelpunkt eine bestimmte Grösse und Lage an. Die in den Mitten der Sehnen errichteten Perpendikularebenen gehen hiebei in die Normalebenen der Punkte M, M' , ihre Durchschnittslinie in die Krümmungsaxe und der Mittelpunkt des Kreises in den Durchschnitt C derselben mit der Schmiegungebene über. Dieser Kreis, dessen Mittelpunkt C und Radius $CM = \rho$ in der Hauptnormale des Punktes M liegen, hat mit der Projection der Curve auf die Schmiegungebene gleiche Krümmung und heisst der Krümmungskreis der Curve im Punkte M , sein Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt und sein Ra-

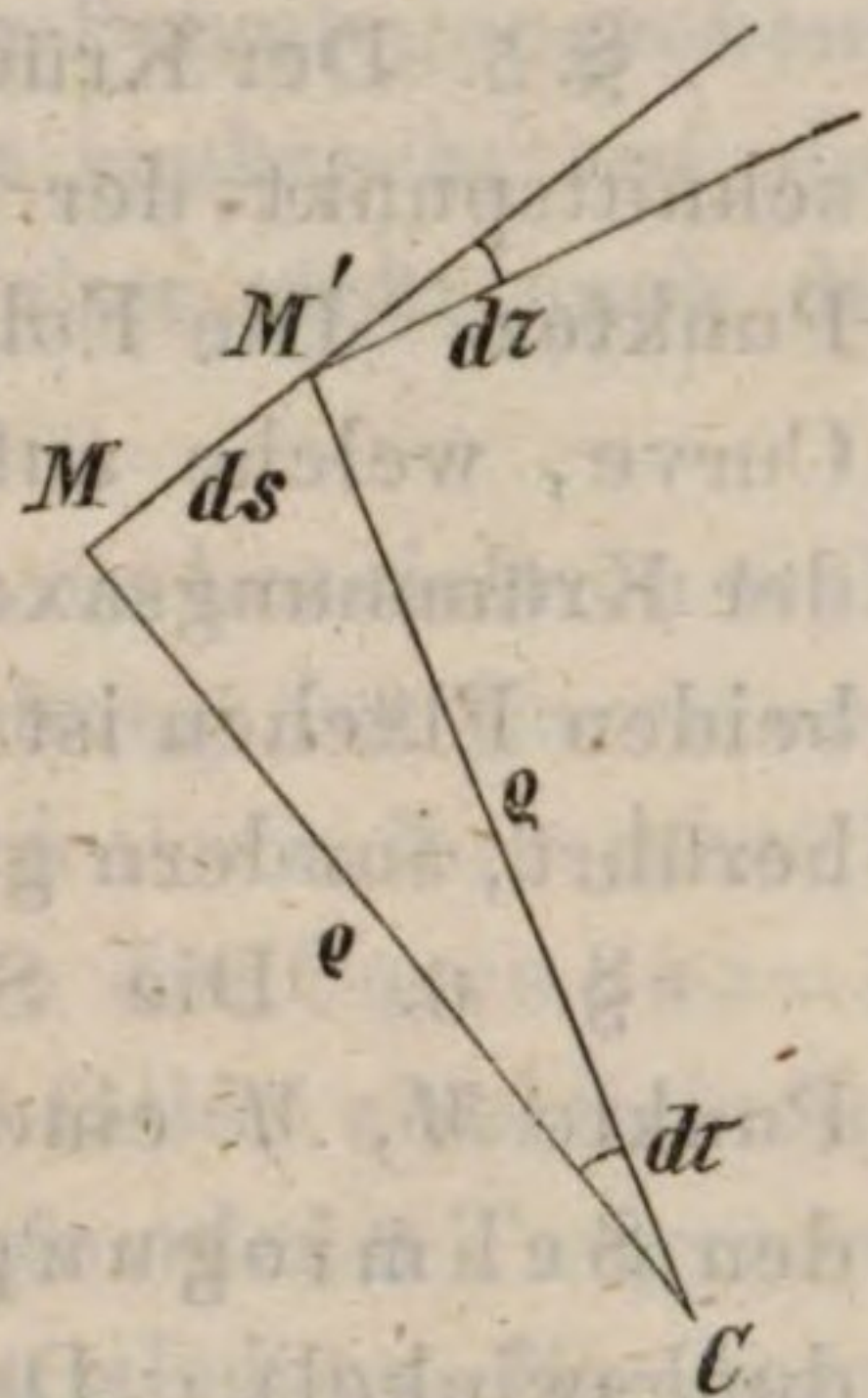
*) Hieraus folgt eine allgemeine Eigenschaft der kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen. Da für alle kürzeste Linien auf einer solchen Fläche $\mu - \nu$ constant ist, so sei $\mu' - \nu'$ die analoge Winkeldifferenz für irgend eine zweite kürzeste Linie derselben Fläche; dann ist $\mu - \nu = \mu' - \nu'$, mithin auch $\mu - \mu' = \nu - \nu'$ d. h.: Die Tangenten irgend zweier kürzesten Linien einer abgewickelten Fläche bilden mit der Erzeugungslinie dieser Winkel μ, ν , deren Differenz während des ganzen Verlaufs dieser Curven constant bleibt.

dius der Krümmungshalbmesser. Aus dem unendlich schmalen Dreieck $MC M'$ (Fig. 2), welches als rechtwinklig und gleichschenkelig angesehen werden kann und in welchem die dem Winkel $C = d\tau$ gegenüberliegende Seite das Bogenelement $MM' = ds$ ist, während seine beiden andern Seiten $MC = M'C = \rho$ sind, ergibt sich

$$\rho \cdot d\tau = ds$$

und mithin:

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}.$$



Nimmt man die Krümmung eines mit der Linieneinheit beschriebenen Kreises als Einheit der Krümmung an, so verhalten sich die Krümmungen zweier Kreise umgekehrt wie die Radien und ist der reciproke Werth des Radius das Mass der Krümmung eines Kreises. Daher ist $\frac{1}{\rho}$ oder $\frac{d\tau}{ds}$ die Krümmung des Krümmungskreises. Man nennt diesen Ausdruck die Krümmung der Curve im Punkte M , auch wohl die erste Krümmung der Curve in diesem Punkte zum Unterschiede von einer bald zu erläuternden zweiten.

§. 4. Der Krümmungskreis hat drei aufeinanderfolgende Punkte oder, was dasselbe ist, zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente oder Tangenten mit der Curve gemein. Die Berührung zweier Curven, welche n aufeinanderfolgende (zusammenfallende) Punkte gemein haben, heisst eine n -punktige Berührung oder eine Berührung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Der Krümmungskreis berührt demnach die Curve 3punktig oder in der zweiten Ordnung. Eine Fläche berührt eine Curve n punktig oder in der $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn sie mit ihr n aufeinanderfolgende Punkte gemein hat. Die Schmiegungeebene berührt demnach die Curve in der zweiten Ordnung. Der Krümmungskreis liegt in der Schmiegungeebene und berührt diese Curve in derselben Ordnung, wie diese. Dieser Satz ist ein spezieller Fall des allgemeineren: Wenn eine Fläche F eine Curve C in der n^{ten} Ordnung berührt, so kann auf der Fläche durch den Berührungspunkt keine Curve gezogen werden, welche C in einer höheren Ordnung, als der n^{ten} berührt. Denn es kann eine auf der Fläche F liegende Curve mit der Curve C nicht mehr Punkte gemein haben, als auf F liegen.

Die Berührung der zweiten Ordnung nennt man auch Osculation. Daher heissen der Krümmungskreis und die Schmie-

gungsebene auch osculirender Kreis und osculirende Ebene.

§. 5. Der Krümmungsmittelpunkt C des Punktes M ist der Durchschnittspunkt der Krümmungsaxe mit der Hauptnormalen dieses Punktes. Die Folge der Krümmungsmittelpunkte bildet daher eine Curve, welche auf der Fläche der Hauptnormalen und der Fläche der Krümmungsaxen liegt und mithin die Durchschnittscurve dieser beiden Flächen ist. Diese Curve wird von den Hauptnormalen nicht berührt, sondern geschnitten. (Vgl. Cap. I, §. 9.)

§. 6. Die Schmiegungebenen zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' einer Curve bilden einen unendlich kleinen Winkel, den Schmiegunswinkel (Torsions- oder Flexions- oder Windungswinkel). Da die Krümmungsaxen und Binormalen dieser Punkte auf den Schmiegungebenen senkrecht stehen, so bilden sie mit einander denselben Winkel. Der Winkel zweier aufeinanderfolgender Krümmungsaxen ist aber der Contingenzwinkel der Gratlinie der Fläche der Krümmungsaxen und der Contingenzwinkel der primitiven Curve ist nach §. 1 gleich dem Winkel zweier aufeinanderfolgender Schmiegungebenen dieser Gratlinie; daher der Satz:

Eine Curve doppelter Krümmung und die Gratlinie der Fläche ihrer Krümmungsaxen stehen in solcher Beziehung zu einander, dass der Contingenzwinkel und Schmiegunswinkel der einen resp. dem Schmiegunswinkel und Contingenzwinkel der andern gleich ist *).

Durch Abwicklung einer Fläche wird der Winkel zweier Tangentenebenen derselben oder der Schmiegunswinkel der Gratlinie dieser Fläche zerstört. Durch Abwicklung der Tangentenfläche geht daher die Curve in eine ebene Curve über, welche mit ihr gleiche Contingenzwinkel hat, durch Abwicklung der Fläche der Krümmungsaxen erhält man aus deren Gratlinie eine ebene Curve, deren Contingenzwinkel den Schmiegunswinkeln der Curve doppelter Krümmung gleich sind. Von diesen beiden ebenen Curven hat die erste mit der Curve doppelter Krümmung gleiche Bogenelemente und folglich auch gleiche Krümmungshalbmesser, das Bogenelement der zweiten ist aber im Allgemeinen nicht gleich dem Bogenelemente jener.

Die Curve und die Gratlinie ihrer Fläche der Krümmungsaxen

*) Cf. Lancret a. a. O. p. 419.

haben noch die Beziehung zu einander, dass die Normalebenen jeder von ihnen den Schmiegungebenen der andern parallel sind. Die Normalebene der erstern ist nämlich selbst die Schmiegungebene der zweiten und die Normalebene dieser steht senkrecht auf der Krümmungsaxe als ihrer Tangente; auf dieser aber steht auch die Schmiegungebene der ersteren senkrecht.

§. 7. Der Schmiegunswinkel, den wir mit $d\sigma$ bezeichnen wollen, misst in einer ähnlichen Weise die Abweichung der Curve von der Schmiegungebene, wie der Contingenzwinkel $d\tau$ ihre Abweichung von der Tangente. Wird in einem Punkte der Curve $d\sigma = 0$, so wird die Curve an dieser Stelle eben, d. h. es fallen zwei Schmiegungebenen zusammen und fallen also 4 Punkte oder 3 Tangenten in eine Ebene. Die Schmiegungebene berührt alsdann die Curve in der dritten Ordnung. Wird in einem Punkte $d\tau$ gleich Null, so wird die Curve an dieser Stelle gradlinig, d. h. es fallen drei aufeinanderfolgende Punkte in die Tangente, der Krümmungskreis geht in die Tangente über und diese berührt die Curve in der zweiten Ordnung.

§. 8. Construiert man ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 3), in welchem eine Kathete gleich dem Bogenelemente ds und der dieser gegenüberliegende Winkel gleich dem Schmiegunswinkel $d\sigma$ ist, so werden die beiden andern Seiten eine Länge r annehmen, so dass

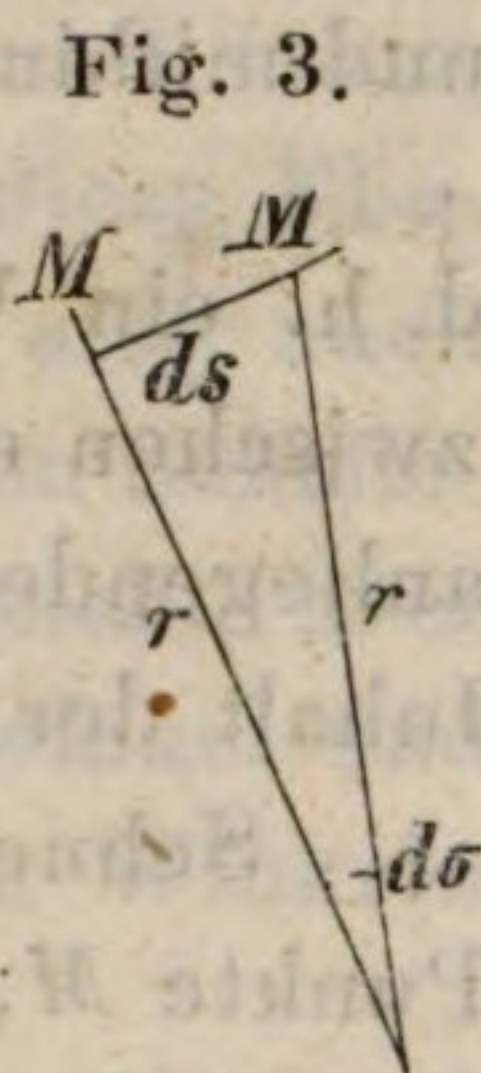
$$r : d\sigma = ds$$

und also

$$r = \frac{ds}{d\sigma}, \quad \frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$$

wird. Der reciproke Werth dieser Länge r misst die Krümmung eines mit ihr als Radius beschriebenen Kreises und wird das Maass der zweiten Krümmung (Schmiegunge, Flexion, Torsion oder Windung) der Curve in dem Punkte genannt, welchem ds und $d\sigma$ angehören, die Länge r selbst der Radius der zweiten Krümmung (Schmiegungs- oder Flexions- oder Torsionsradius) jenes Punktes genannt. Weil die Curve zwei Krümmungen besitzt, heisst sie Curve doppelter Krümmung.

Denkt man sich eine Curve, welche mit der gegebenen Curve gleiches Bogenelement, zum Contingenzwinkel aber deren Schmiegunswinkel hat, so stellt deren Krümmungshalbmesser den Radius r dar. Da der Schmiegunswinkel dieser Curve hiedurch noch nicht bestimmt wird, so gibt es unzählig viele Curven welche dieser Be-



dingung genügen, keine von ihnen ist identisch mit der Gratlinie der Krümmungsaxen, aber eine ist darunter, deren Schmiegunswinkel gleich dem Contingenzwinkel der gegebenen Curve ist. Diese Curve hat mit der gegebenen reciproke Krümmungen; man könnte sie die der ursprünglichen reciproke Curve nennen.

§. 9. Da der Schmiegunswinkel gleich dem Contingenzwinkel der Gratlinie auf der Fläche der Krümmungsaxen ist, so kann die Summe σ der Schmiegunswinkel, d. h. der Winkel, welche die Schmiegunsebenen aller Punkte der Curve zwischen zwei festen Punkten M, N mit einander bilden, in ähnlicher Weise gefunden werden, wie wir in Cap. I. §. 2 die Summe der Contingenzwinkel gefunden haben. Man kann aber auch direct ihre Summe finden. Nach einem Satze der Elementargeometrie ist die doppelte Summe der Winkel A, B, C einer dreiflächigen Ecke weniger dem vierfachen körperlichen Raume E der Ecke selbst gleich dem vollen körperlichen Winkel Ω , nämlich

$$2(A + B + C) - 4E = \Omega.$$

Ist nun A' der Nebenwinkel von A , also $A' + A = \frac{1}{2}\Omega$, so kommt, wenn man dies einsetzt,

$$B + C = 2E + A'$$

und mithin wird

$$C = 2E + A' - B.$$

d. h. ein Winkel einer körperlichen Ecke ist gleich der Differenz zwischen einem der Winkel an der Gegenseite und dem diesem nicht anliegenden Aussenwinkel des Dreiecks vermehrt um den doppelten Inhalt der körperlichen Ecke.

Schneiden wir nun das System der Schmiegunsebenen der Punkte $M, M', M'', \dots M^{(n-1)}, N$ mit irgend einer Ebene, welche mit diesen der Reihe nach die Winkel $\mu, \mu', \mu'', \dots \nu$ bildet und bezeichnen die körperlichen Ecken, welche von je zwei aufeinanderfolgenden Schmiegunsebenen und der Schnittebene gebildet werden, der Reihe nach mit $d\varepsilon, d\varepsilon', d\varepsilon'', \dots d\varepsilon^{(n)}$ sowie die Schmiegunswinkel selbst mit $d\sigma, d\sigma', d\sigma'', \dots d\sigma^{(n)}$, so erhält man nach dem angeführten Satze:

$$d\sigma = 2d\varepsilon + \mu' - \mu$$

$$d\sigma' = 2d\varepsilon' + \mu'' - \mu'$$

$$d\sigma'' = 2d\varepsilon'' + \mu''' - \mu''$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$d\sigma^{(n)} = 2d\varepsilon^{(n)} + \nu - \mu^{(n-1)}$$

welche sich in der Tangente $M'M''$ schneiden und mit einander den Schmiegunswinkel $d\sigma$ bilden. Die Normalebene des Punktes M' schneidet diese beiden Ebenen in zwei Geraden MC , $M'C'$ (Fig. 4), welche senkrecht zur Tangente $M'M''$ sind und also mit einander den Winkel $d\sigma$ bilden. Von diesen beiden Linien ist $M'C'$, welche in der Schmiegunsebene des Punktes M' liegt, die Hauptnormale dieses Punktes, die andre MC ist, da die Normalebene von M' auch auf der Schmiegunsebene von M senkrecht steht, die rechtwinklige Projection von $M'C'$ auf die Schmiegunsebene von M . Diese Linie MC schneidet sich mit der Hauptnormalen MC des Punktes M im Krümmungsmittelpunkte C und bildet mit ihr einen Winkel gleich dem Contingenzwinkel $d\tau$. Ziehen wir daher durch M' in der Schmiegunsebene von M mit der Hauptnormalen MC eine Parallele $M'\gamma$, so bildet sie mit $M'C'$ gleichfalls den Winkel $CM'\gamma = d\tau$ und da sie die Richtung der ersten Hauptnormalen hat, so ist der Winkel $\gamma M'C'$, den sie mit der Hauptnormalen $M'C'$ des Punktes M' bildet der Winkel dk beider Hauptnormalen oder der Winkel der ganzen Krümmung. Die drei im Punkte M' sich schneidenden Geraden $M'C$, $M'C'$, $M'\gamma$ bilden eine an der Kante MC rechtwinklige dreiflächige Ecke, deren ebene Winkel $d\sigma$, $d\tau$ und dk sind, wovon dk dem rechten Winkel gegenüberliegt. Beschreiben wir jetzt um den Punkt M' als Mittelpunkt mit der Linieneinheit als Radius eine Kugel, so erzeugt die dreiflächige Ecke auf ihr ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, ABC dessen drei Seiten $d\tau$, $d\sigma$, dk unendlich klein sind. Dies Dreieck ist folglich als eben anzusehen und daher hat man nach dem pythagorischen Satze:

$$dk^2 = d\sigma^2 + d\tau^2.$$

Den obigen Bemerkungen zufolge kann dieser Satz auch so ausgesprochen werden:

Das Quadrat des Schmiegunswinkels der Gratlinie auf der rectificirenden Fläche ist gleich der Quadratsumme des Contingenzwinkels der Curve und des Contingenzwinkels der Gratlinie auf der Fläche der Krümmungsaxen.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar auch noch der folgende:

Bei keiner Curve doppelter Krümmung kann je der Winkel der ganzen Krümmung kleiner als der Contingenzwinkel oder kleiner als der Schmiegunswinkel sein.

Ist die Curve eben, so ist der Schmiegunswinkel Null und der Winkel der ganzen Krümmung gleich dem Contingenzwinkel.

§. 11. Der Winkel dk der ganzen Krümmung misst die Abweichung zweier Hauptnormalen von einander und in gewissem Sinne die schraubenartige Windung der Curve. Bestimmt man nun ähnlich, wie in §. 8, eine Länge R so, dass

$$R \cdot dk = ds$$

also

$$R = \frac{ds}{dk}, \quad \frac{1}{R} = \frac{dk}{ds}$$

wird, so soll der reciproke Werth von R das Maass der Krümmung der Curve im Punkte M , an welchem das Bogenelement ds liegt oder auch kurz die ganze Krümmung der Curve im Punkte M , die Linie R aber der Radius der ganzen Krümmung heissen. Die Linie R würde der Krümmungshalbmesser einer Curve sein, welche bei gleichem Bogenelemente mit der gegebenen Curve den Winkel dk zum Contingenzwinkel oder der Schmiegunsradius einer andern Curve sein, welche bei demselben Bogenelemente den Winkel dk zum Schmiegunswinkel hätte.

Der Radius R der ganzen Krümmung steht mit dem Krümmungsradius ϱ und dem Schmiegunsradius r in einer sehr einfachen Beziehung, nämlich:

Das Quadrat des reciproken Werthes vom Radius der ganzen Krümmung ist gleich der Quadratsumme der reciproken Werthe des Krümmungsradius und des Schmiegunsradius. Oder auch: Das Quadrat der ganzen Krümmung ist gleich der Quadratsumme der ersten und zweiten Krümmung der Curve.

Es ist nämlich nach dem Lancret'schen Satze

$$dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2,$$

mithin auch, wenn man mit ds^2 dividirt:

$$\left(\frac{dk}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$$

oder weil

$$\frac{1}{R} = \frac{dk}{ds}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}, \quad \frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}$$

ist,

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2$$

§. 12. Aus dieser Gleichung folgt noch

$$R = \frac{\varrho \cdot r}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}},$$

und hieraus ergibt sich, weil sowohl

$$\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}}, \text{ als auch } \frac{r}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}}$$

nicht grösser als die Einheit werden kann, der Satz:

Bei keiner Curve doppelter Krümmung kann in irgend einem Punkte der Radius der ganzen Krümmung grösser sein als der Krümmungsradius oder der Schmiegungradius.

§. 13. Die drei Winkel $d\tau$, $d\sigma$, dk haben für die Erzeugung der Curve eine wichtige Bedeutung. $d\tau$ ist der Winkel, um welchen die Tangente sich drehen muss, damit die Curve sich überhaupt krümmt, $d\sigma$ der Winkel, um welchen die Schmiegungebene sich dreht, damit die Curve statt eben, doppelt gekrümmt werde und dk ist der Winkel, um welchen sich in Folge dieser beiden Drehungen die Hauptnormale und die rectificirende Ebene drehen. Die Axen, um welche diese Drehungen erfolgen, sind: für die erste die Krümmungsaxe, für die zweite die Tangente und für die dritte die rectificirende Gerade. Führt man diese Drehungen im entgegengesetzten Sinne aus, d. h. lässt man die Schmiegunswinkel $d\sigma$ zu Null werden, so wird die Curve eben, werden hierauf alle $d\tau = 0$, so geht sie in eine Gerade über. dk wird, vermöge der Gleichung $dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2$ von selbst Null, wenn $d\sigma$ und $d\tau$ verschwinden.

§. 14. Beschreibt man um irgend einen Punkt des Raumes mit der Einheit als Radius eine Kugelfläche und legt durch deren Mittelpunkt eine Schaar Gerader parallel den Tangenten, eine andere parallel den Krümmungsaxen und eine dritte parallel den Hauptnormalen, so erhält man auf der Kugel drei sphärische Curven, von denen je drei ein und demselben Punkt der gegebenen Curve entsprechende Punkte ein Octantendreieck bilden *). Die Bogenelemente dieser drei Curven messen den Contingenzwinkel, den Schmiegunswinkel und den Winkel der ganzen Krümmung, also die Bogen selbst die Summen dieser Winkel. Die Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel und die Bogenelemente oder Tangenten derselben sind parallel der Schmiegungebene, der Normalebene und einer Ebene parallel zwei aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, d. h. parallel einer zur rectificirenden Geraden senkrechten Ebene, von der wir später reden werden, und die wir die Ebene der ganzen Krümmung nennen wollen, weil durch Projection der beiden Haupt-

*) Cf. Senff, theoremata principalia e theoria curvarum et superficiorum. Dorpati Liviorum 1831. Cap. IV, §. 2.

normalen auf sie der Winkel dk erhalten wird. Die Contingenzwinkel dieser drei Curven geben den Schmiegunswinkel, den Contingenzwinkel und den Winkel zweier rectificirenden Geraden d. h. den Contingenzwinkel der Gratlinie der rectificirenden Fläche an. Es sind nämlich ihre Tangenten senkrecht zu den Durchschnittslinien zweier Ebenen, welche durch zwei ihrer Bogenelemente und den Kugelmittelpunkt gehen, weil sie zugleich als Tangenten der Kugel auf deren Radius senkrecht stehen. Die Schmiegunswinkel dieser drei Curven sind, weil ihre Schmiegunsebenen senkrecht zu den Radien der Kugel sind gleich dem Contingenzwinkel, dem Schmiegunswinkel und dem Winkel der ganzen Krümmung. Sie sind also drei Curven, deren Schmiegunswinkel durch ihre Bogenelemente gemessen werden.

§. 15. Hat eine Curve einen ausgezeichneten Punkt, eine ausgezeichnete Tangente oder Schmiegunsebene, so hat sie an der betreffenden Stelle auch hinsichtlich der Krümmungen ausgezeichnete Eigenschaften. Ist nämlich der Punkt M_0 ein Rückkehrpunkt und man lässt eine bewegliche Tangente über die Curve hingleiten, so wird der Abstand ihres Berührungspunktes M von einem festen Punkte A in ihr ein Maximum oder Minimum, sobald M nach M_0 gelangt, weil in diesem Punkte der Punkt M den Sinn seiner Bewegung in der Tangente ändert und also die Länge AM vom Wachsen zum Abnehmen, oder umgekehrt vom Abnehmen zum Wachsen übergeht. Die Aenderung von AM ist aber das Bogenelement ds im Punkte M_0 , diese muss daher gleich Null werden. Der Punkt M_0 ist gewissermaassen ein Stillstandspunkt für die Bewegung von M in der Tangente. In ähnlicher Weise muss für eine Rückkehrtangente $d\tau$ und für eine Rückkehrebene $d\sigma$ gleich Null werden. Mit Rücksicht hierauf hat man in den acht in Cap. I. §. 12 verzeichneten Fällen ausgezeichneter Elemente die Werthe:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
ds	$\Delta^v o$	$\Delta^v o$	$\Delta^v o$	$\Delta^v o$	$= o$	$= o$	$= o$	$= o$
$d\tau$	$\Delta^v o$	$\Delta^v o$	$= o$	$= o$	$\Delta^v o$	$\Delta^v o$	$= o$	$= o$
$d\sigma$	$\Delta^v o$	$= o$	$\Delta^v o$	$= o$	$\Delta^v o$	$= o$	$\Delta^v o$	$= o$
dk	$\Delta^v o$	$= d\tau$	$= d\sigma$	$= o$	$\Delta^v o$	$\Delta^v o$	$= d\sigma$	$= o$
ϱ	$= \frac{ds}{d\tau}$	$= \frac{ds}{d\tau}$	$= \infty$	$= \infty$	$= o$	$= o$	$= \frac{o}{o}$	$= \frac{o}{o}$
r	$= \frac{ds}{d\sigma}$	$= \infty$	$= \frac{ds}{d\sigma}$	$= \infty$	$= o$	$= \frac{o}{o}$	$= o$	$= \frac{o}{o}$
R	$= \frac{ds}{dk}$	$= \varrho$	$= r$	$= \infty$	$= o$	$= o$	$= o$	$= \frac{o}{o}$

Die Fälle 2. und 4. nennt Monge: simple inflexion und double inflexion *).

Cap. III.

Die Tangentenfläche und die Evolventen.

§. 1. Lässt man eine bewegliche Tangente über die Curve hingleiten, so beschreibt jeder ihrer Punkte P auf der abwickelbaren Tangentenfläche eine Curve P , welche die sämtlichen Tangenten unter rechten Winkeln schneidet. Berührt nämlich die Tangente im Punkte M , so geht sie zugleich durch einen folgenden, dem M unendlich nahen Punkt M' der Curve. Soll sie nun in die Lage der Tangente des Punktes M' gelangen, welche durch M' und den nächstfolgenden Punkt M'' geht, so muss sie sich in der Ebene beider Tangenten, d. h. in der Schmiegungeebene der Curve im Punkte M um den Punkt M' und zwar um den Contingenzwinkel $d\tau$ drehen. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt P einen unendlich kleinen Kreisbogen PP' , dessen Mittelpunkt M' und dessen Radius $M'P$ ist. Dieser Kreisbogen, welcher mit dem Bogenelemente der Curve P zusammenfällt, schneidet die Tangente $M'P$ des Punktes M rechtwinklig. Damit die bewegliche Gerade in die Lage einer dritten Tangente gelange, muss sie sich in der Schmiegungeebene des folgenden Punktes M' um den Punkt M'' drehen und dabei beschreibt der Punkt P' den Kreisbogen $P'P''$ vom Radius $M''P'$ um den Punkt M'' als Mittelpunkt und dieser Kreisbogen steht senkrecht auf der Tangente $M''P'$ des Punktes M' u. s. f.

Die Tangenten der Curve $MM'M''\dots$ sind also Normalen der Curve $PP'P''\dots$.

§. 2. Die Differenz zweier aufeinander folgender Radien dieser Kreisbogen, d. h. die Differenz der Entfernungen zweier aufeinander folgender Punkte P, P' der Curve P von den ihnen entsprechenden Punkten M, M'' der ursprünglichen Curve ist gleich dem zwischenliegenden Bogenelemente dieser, nämlich

$$M''P' - M'P = M'M'',$$

ebenso

$$M'''P'' - M''P' = M''M''',$$

u. s. f.

*) Cf. Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, p. 416.

Es ändert sich folglich die Entfernung der entsprechenden Punkte beider Curven immer um das Bogenelement der Curve $MM'M''\dots$. Durch Addition einer Reihe von Gleichungen der Art ergibt sich daher, dass die Differenz der Entfernungen irgend zweier Punkte P, Q der Curve P von den ihnen entsprechenden Punkten M, N der Curve M gleich dem zwischenliegenden Bogen MN der letzteren Curve ist.

Bewegt sich die Tangente so, dass die Entfernung MP immer wächst, so nimmt sie ab, wenn sich diese im entgegengesetzten Sinne bewegt. Daher nähert sich dann der Punkt P immer mehr dem Punkte M und fällt auch an einer Stelle M_0 mit ihm zusammen. Der Punkt M_0 ist derjenige, von welchem ab gerechnet der Bogen M_0M gleich dem Radius MP des Punktes P ist. Im Punkte M_0 schneidet die Curve P die Curve M nicht, berührt sie auch nicht, sondern bildet eine Spitze und biegt sich von dieser aus nach der andern Seite hin ab, um sich immer weiter und weiter von der Curve M zu entfernen. Da dies offenbar von allen Curven P und allen Punkten M gilt, so erhellt, dass die sämtlichen Curven P auf der Tangentenfläche eine Schaar Linien bilden, welche mit der Curve M je einen Punkt gemein haben, von welchem aus sie nach entgegengesetzten Seiten auf der Fläche ins Unendliche verlaufen.

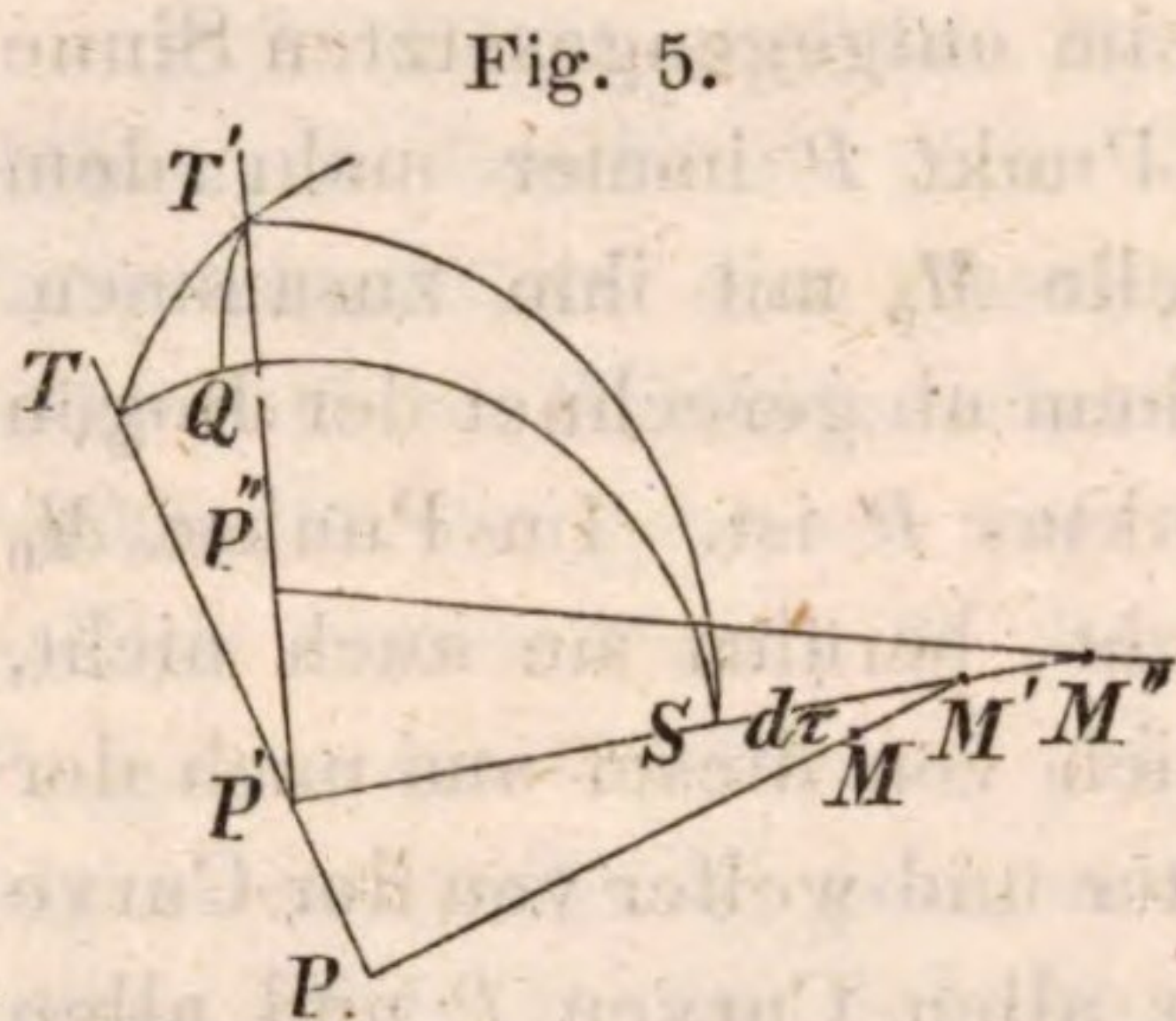
§. 3. Da die Differenz zweier Radien MP immer gleich der Länge des zwischenliegenden Bogens der Curve M ist, so ist der grössere von ihnen gleich der Summe des kleineren und dieses Bogens. Befestigt man daher im Berührungspunkte des grösseren Radius eine biegsame Linie (einen Faden) von einer Länge gleich dieser Summe und biegt ihn allmählig so über die Curve M hin, dass das freie Ende immer die Richtung der Tangente an die Curve hat, so beschreibt der Endpunkt dieser Linie einen Theil der Curve P . Dasselbe geschieht in umgekehrtem Sinne, wenn man den Faden erst über die Curve M hinbiegt und darauf nach und nach so ablöst, dass das freie Endstück desselben immer Tangente an dieselbe bleibt. Weil bei diesem letzteren Vorgange die Curve M durch den Faden abgewickelt wird und die Curve P diese Abwicklung gewissermaassen ausführt, so heisst die Curve P eine Evolvente oder auch zum Unterschiede von einer andern Art von Abwickelungscurven, eine Filar-Evolvente der Curve M .

Eine Curve hat so viel Filar-Evolventen, als eine ihrer Tangenten Punkte hat; alle liegen auf der Tangentenfläche und schneiden die Tangenten sämtlich

unter rechten Winkeln. Sie bilden also das System der orthogonalen Trajectorien der Tangenten.

Die Tangentenfläche ist also zugleich die Evolventenfläche. Wickelt man sie ab, so gehen die Curve M und alle ihre Evolventen in ebene Curven über; die letzteren bleiben aber auch dann noch Evolventen der ersteren.

§. 4. Wir suchen jetzt den Contingenzwinkel einer Filar-Evolvente. Es seien P, P', P'' (Fig. 5) drei Punkte einer



solchen, $PM, P'M', P''M''$ die durch sie hindurchgehenden Tangenten der Curve M in den Punkten M, M', M'' und also M', M'' die beiden Punkte, aus welchen die Bogenelemente $PP', P'P''$ beschrieben sind. Die Tangenten $PT, P'T'$ in den Punkten P, P' der Evolvente bestimmen mit $P'M'$ auf einer um P' mit der Einheit als Radius beschriebenen Kugel ein unendlich schmales sphärisches Dreieck $TT'S$, in welchem die Seite TT' den gesuchten Contingenzwinkel $d\tau_1$, misst, während die beiden andern Seiten TS und $T'S$ die Winkel $TP'S = \frac{\pi}{2} + d\tau$ und $T'P'S = \frac{\pi}{2}$ messen, wenn $d\tau$ den Contingenzwinkel $PM'P'$ im Punkte M vorstellt. Fällt man daher von der Ecke T' auf die gegenüberliegende Seite TS das Perpendikel $T'Q$, so wird wegen des verschwindenden Winkels S , welcher den Winkel $d\sigma$ der Schmiegungebenen $PM'P'$ und $P'M''P''$ darstellt, $SQ = ST' = \frac{\pi}{2}$ mithin $TQ = d\tau$ und $T'Q = d\sigma$. Dadurch erhält man aus dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck $TT'Q$.

$$d\tau_1^2 = d\sigma^2 + d\tau^2$$

oder also in Folge des Lancret'schen Satzes

$$d\tau_1 = dk,$$

d. h.

Der Contingenzwinkel im Punkte P einer Filar-Evolvente ist gleich dem Winkel der ganzen Krümmung im entsprechenden Punkte M der gegebenen Curve.

Dieser Satz leuchtet auch unmittelbar ein, wenn man bedenkt, dass die Normalebenen der Evolvente in P und P' durch die Tangenten der Curve M in M und M' hindurch gehen und da sie senkrecht auf den Tangenten PT und $P'T'$ sind, auch senkrecht stehen

auf den beiden Schmiegungebenen der Curve M , nämlich auf $PM'P'$ und $P'M''P''$, welche diese Tangenten PT und $P'T'$ enthalten. Daher sind diese Normalebenen die rectificirenden Ebenen in M und M' und bilden also miteinander den Winkel dk ; als Normalebenen der Curve P bilden sie aber auch einen Winkel gleich dem Contingenzwinkel $d\tau_1$ dieser Curve, mithin ist $d\tau = dk$.

§. 5. Der Winkel $T'TQ$ des unendlich kleinen Dreiecks ist die Neigung i der Schmiegungebene der Evolvente gegen die Schmiegungebene der Curve M und mithin

$$\lg i = \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} : \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\rho}{r}$$

d. h.:

Die Tangente der Neigung der Schmiegungebene einer Filar-Evolvente gegen die Schmiegungebene der primitiven Curve wird durch das Verhältniss des Krümmungshalbmessers zum Schmiegunghalbmesser der letzteren angegeben.

§. 6. Ein Perpendikel von S auf TT' misst die Neigung λ der Tangente der Curve M gegen die Schmiegungebene der Evolvente. Man erhält

$$\sin \lambda = \sin \left(\frac{\pi}{2} + d\tau \right) \cdot \sin i = \sin i$$

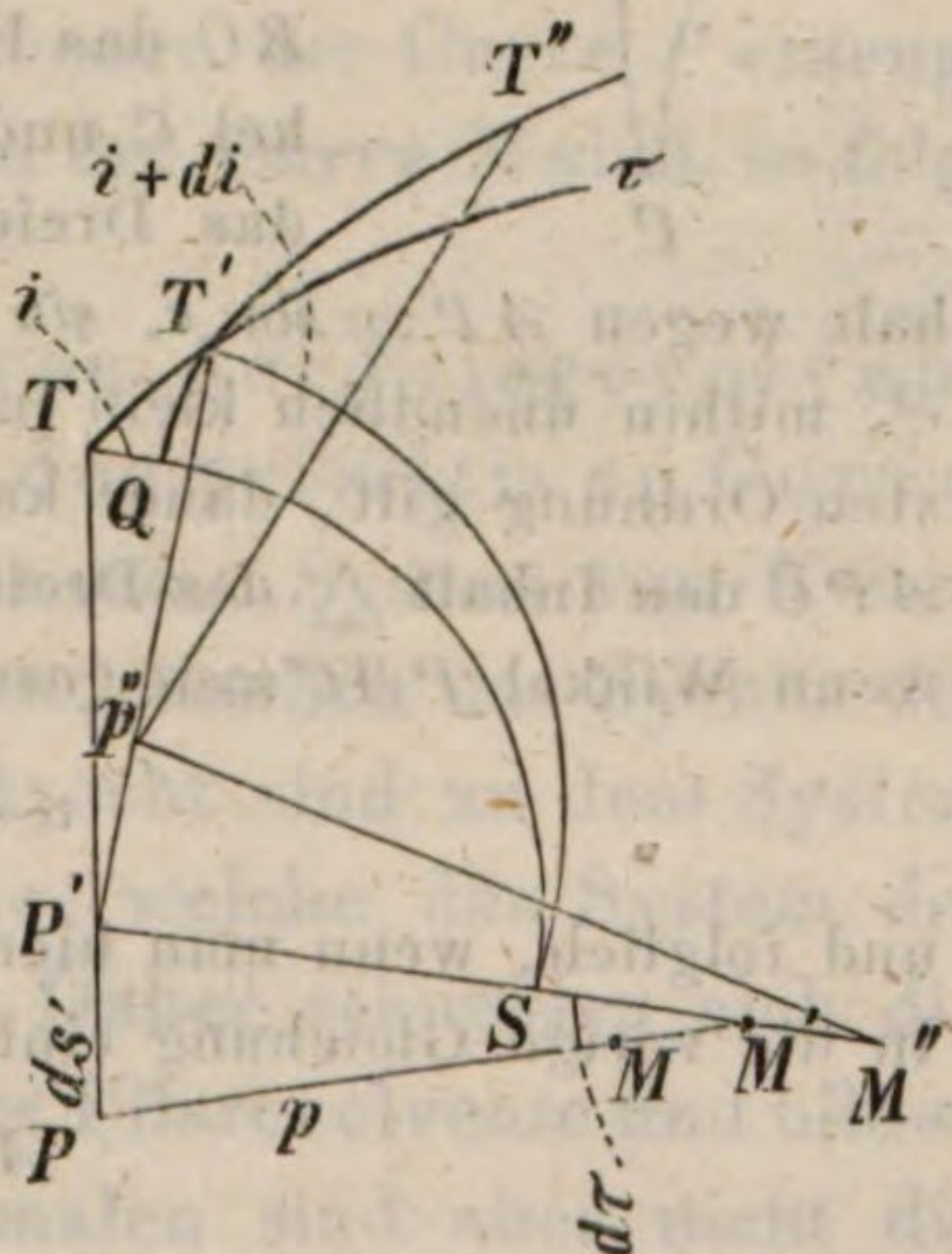
d. h.

Die Neigung der Schmiegungebene einer Filar-Evolvente gegen die Tangente der primitiven Curve ist gleich der Neigung der Schmiegungebenen beider Curven gegeneinander.

§. 7. Auch der Schmiegunswinkel $d\sigma_1$ der Evolvente kann leicht gefunden werden. Es bildet nämlich (Fig. 6) die Schmiegungebene des Punktes M mit der Schmiegungebene des Punktes P den Winkel $\tau TS = i$ und folglich die Schmiegungebene des folgenden Punktes M' mit der Schmiegungebene von P' den Winkel $T''TS = i + di$, mit der ersten Schmiegungebene (von P) bildet aber die Schmiegungebene von M' den Aussenwinkel $\tau T'S$ des Dreiecks $T'TS$. Die Differenz beider Winkel $T''TS$ und $\tau T'S$ ist der gesuchte Schmiegunswinkel, nämlich

$$d\sigma_1 = T''TS - \tau T'S = i + di - \tau T'S.$$

Fig. 6.



Nun ist aber, wie leicht zu sehen *), wenn wieder $T'Q$ das Perpendikel von T' auf TS vorstellt

$$\tau T'S = TTS - \left(\frac{\pi}{2} - QTS \right) = i - \left(\frac{\pi}{2} - QTS \right)$$

und daher

$$d\sigma_1 = di + \left(\frac{\pi}{2} - QTS \right)$$

oder weil aus dem Dreiecke QTS folgt

$$\cos QTS = \cotg T'S \cdot \tg T'Q = \cotg \frac{\pi}{2} \cdot d\sigma = 0,$$

mithin $QTS = \frac{\pi}{2}$ wird:

$$d\sigma_1 = di$$

d. h.:

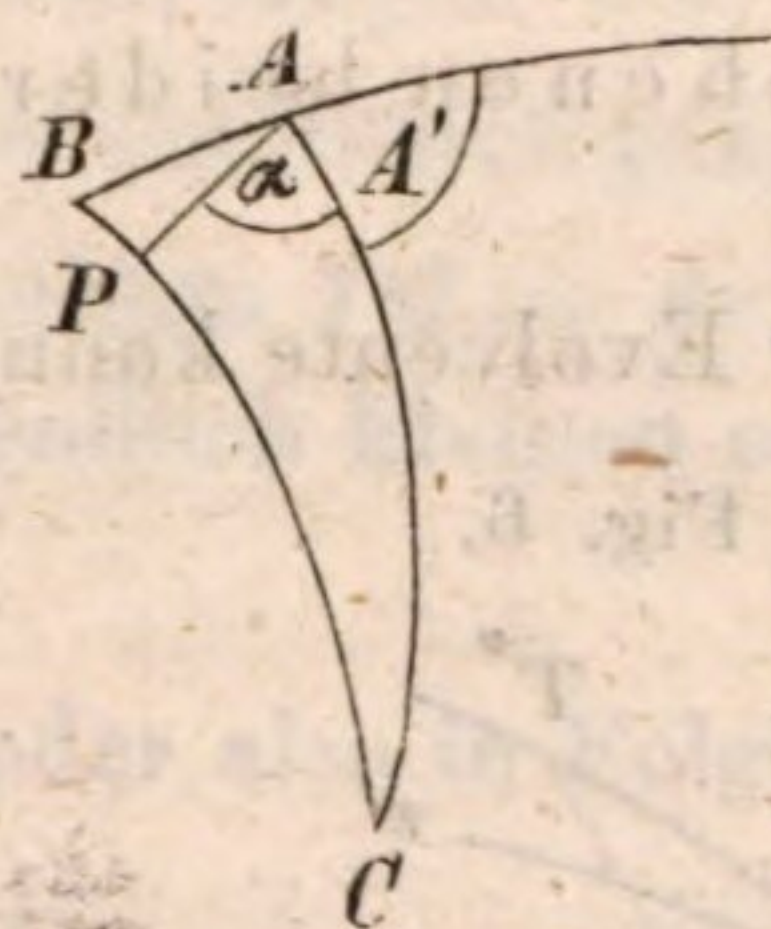
Der Schmiegunswinkel einer Filarevolvente ist das Increment des Winkels, unter welchem die Schmiegunsebene der Evolvente gegen die Schmiegunsebene der primitiven Curve geneigt ist.

Aus der Gleichung

$$\tg i = \frac{d\sigma}{d\tau}$$

folgt daher

*) Bedeutet nämlich $\triangle$ den Inhalt des sphärischen Dreiecks ABC und A den Nebenwinkel von A , so ist



mithin

$$A + B + C - 2\triangle = \pi$$

$$A + A' = \pi$$

$$A' = B + C - (2\triangle + \pi).$$

Fällt man nun von A auf die gegenüberliegende Seite BC das Perpendikel AP , so ist für den Fall, dass Winkel C und seine Gegenseite c unendlich klein werden, das Dreieck ABP selbst unendlich klein und sein Inhalt wegen $AP = \sin c \cdot \sin B$ und $\tg BP = \tg c \cdot \cos B$ von der Ordnung c^2 , mithin unendlich klein in der zweiten Ordnung, wenn c als von der ersten Ordnung gilt, daher kann der Inhalt $\triangle'$ des rechtwinkligen Dreiecks APC den Inhalt $\triangle$ des Dreiecks ABC vertreten. Nun ist aber für dieses, wenn Winkel $PAC = \alpha$ gesetzt wird

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + C - 2\triangle' = 2\pi$$

und folglich, wenn man hieraus den Werth für $2\triangle'$ entnimmt und für $2\triangle$ in die vorige Gleichung einführt:

$$A' = B + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

$$d\sigma_1 = \frac{d \cdot \frac{d\sigma}{d\tau}}{1 + \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2} = \left(\frac{d\tau}{dk}\right)^2 \cdot d\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right) = \frac{R^2}{\varrho^2} \cdot d\left(\frac{\varrho}{r}\right).$$

§ 8. Bezeichnet man die Länge MP mit p , so ist das Bogenelement $PP' = ds_1$, gegeben durch die Gleichung

$$ds_1 = p \cdot d\tau$$

und der Krümmungshalbmesser der Evolvente

$$\varrho_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1} = p \cdot \frac{d\tau}{dk} = p \cdot \cos i = p \cdot \frac{R}{\varrho}.$$

Hieraus folgt, dass die Krümmungshalbmesser der Filarevolventen in den Punkten, in welchen sie dieselbe Tangente der primitiven Curve schneiden, um so grösser sind, je weiter diese Punkte von der Curve M abstehen. Die Evolventen werden mithin um so flacher, je weiter sie sich auf der Tangentenfläche von der Curve entfernen.

Aus der Gleichung $\varrho = p \cdot \cos i$ folgt, dass ϱ die Projection von p auf die Schmiegungeebene von P oder, was dasselbe ist, dass der Punkt M' (oder in der Grenze M) in einem im Krümmungsmittelpunkte auf der Schmiegungeebene der Curve P errichteten Perpendikel liegt. Dies Perpendikel ist die Krümmungsaxe im Punkte P für die Curve P und daher also der Satz:

Die primitive Curve M liegt auf der Fläche der Krümmungsaxen der Filarevolvente.

Man sieht auch leicht noch den folgenden:

Die sämtlichen Filarevolventen haben eine gemeinschaftliche Fläche der Krümmungsaxen, und diese geht durch die primitive Curve hindurch.

Da diese Fläche von den Normalebeneen der Curve P erzeugt wird und diese die rectificirenden Ebenen der Curve M sind, so folgt noch der weitere Satz:

Die Fläche der Krümmungsaxen der Filarevolventen ist die rectificirende Fläche der primitiven Curve.

§. 9. Die Filarevolventen bilden das eine System von Krümmungslinien auf der Fläche der Tangenten, nämlich das System der Linien stärkster Krümmung, da sie senkrecht sind zu dem System der geraden Erzeugungslinien der Fläche, welche das System der Linien schwächster Krümmung bilden. Daher schneiden sich die Normalen der Tangentenfläche längs einer Filarevolvente und bilden eine abwickelbare Fläche. Diese Normalen sind aber nicht die

Hauptnormalen der Evolvente, weil deren Schmiegungeebene nicht senkrecht steht auf der Schmiegungeebene der primitiven Curve, sondern mit ihr den Winkel i bildet, der nie $= 90^\circ$ werden kann, da $\operatorname{tg} i = \frac{d\sigma}{d\tau}$ ist, also $d\tau = 0$ d. h. die Curve eine Gerade werden müsste, wenn dieser Fall eintreten sollte. Solcher abwickelbaren Normalflächen giebt es so viele, als es Evolventen giebt; ihre Gratlinien bilden eine Fläche, welche der Ort der Krümmungsmittelpunkte der ebenen Normalschnitte der Tangentenfläche ist. Alle diese Gratlinien haben zum Contingenzwinkel den Schmiegungewinkel der primitiven Curve, da ihre Tangenten senkrecht zu den Schmiegungeebenen dieser sind und zum Schmiegungewinkel deren Contingenzwinkel, da ihre Schmiegungeebenen senkrecht zu den Tangenten der primitiven Curve sind. Sie sind also im Sinne von Cap. II. §. 8 reciproke Curven dieser.

§. 10. Lässt man eine Ebene so an einer Curve hingleiten, dass sie immer Schmiegungeebene derselben bleibt, so beschreibt jeder ihrer Punkte P eine gewisse Curve, welche die Schmiegungeebenen sämtlich unter rechten Winkeln schneidet. Denn wenn die bewegliche Ebene die Lage der Schmiegungeebene des Punktes M hat, so geht sie noch durch zwei folgende Punkte M' , M'' ; soll sie nun in die Lage der Schmiegungeebene des folgenden Punktes M' gelangen, welche durch M' , M'' , M''' geht, so muss sie sich um die gemeinschaftliche Durchschnittslinie beider Ebenen, nämlich um die Tangente $M'M''$ des Punktes M' und zwar um den Schmiegungewinkel $d\sigma$ des Punktes M drehen. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt P den unendlich kleinen Kreisbogen PP' um einen gewissen Punkt C in dieser Tangente, den man erhält, wenn man von P oder P' auf die Tangente ein Perpendikel $PC = P'C$ fällt. Die Ebene PCP' dieses Kreisbogens steht senkrecht auf der Tangente $M'M''$ und mithin auch auf der Schmiegungeebene $MM'M''$ des Punktes M , welche durch diese Tangente hindurch geht und das Bogenelement PP' ist senkrecht zum Radius PC , mithin ebenfalls senkrecht zur Schmiegungeebene, d. h. die Schmiegungeebene ist die Normalebene im Punkte P . Soll die bewegliche Ebene in die Lage der Schmiegungeebene der Punkte M'' , M''' , N^{IV} , ... gelangen, so muss sie sich nach und nach um die Tangenten dieser Punkte drehen, der Punkt P beschreibt alsdann die Bogenelemente $P'P''$, $P''P'''$, $P'''P^{\text{IV}}$, ... um die Punkte C' , C'' , C''' , ... in jenen Tangenten und die Schmiegunge-

ebenen der Punkte $M', M'', M''', \dots$ sind die Normalebenen der Curve P in den Punkten $P', P'', P''', \dots$

Hieraus erhellt, dass die Curve P die Schmiegungebenen der Curve M rechtwinklig schneidet, dass die Punkte C , aus welchen ihre Bogenelemente als Kreisbogen beschrieben wurden, ihre Krümmungsmittelpunkte und die Radien dieser Kreisbogen, nämlich die Perpendikel PC ihre Hauptnormalen und Krümmungshalbmesser sind; ferner dass die Winkel PCP' , welche auch von den Tangenten in P und P' gebildet werden, d. h. die Contingenzwinkel der Curve P gleich den Schmiegunswinkeln $d\sigma$ der Curve M sind, dass die Schmiegunswinkel der Curve P gleich den Contingenzwinkeln $d\tau$ der Curve M sind, weil die Schmiegungebenen, wie PCP' senkrecht auf den Tangenten dieser Curve stehen, sowie endlich, dass die Krümmungsachsen der Curve P identisch mit den Tangenten von M sind.

§. 11. Die Curven P heissen Planevolventen der Curve $M^*)$, da die Curve M bei ihrer Erzeugung gewissermaassen durch die bewegliche Schmiegungebene abgewickelt wird. Eine Curve hat so viele Planevolventen, als Punkte in einer ihrer Schmiegungebenen sind; alle zusammen bilden das System der orthogonalen Trajectorien der Schmiegungebenen. Eine Planevolvente kann aber niemals zugleich Filarevolvente und eine Filarevolvente niemals zugleich Planevolvente sein. Denn die Punkte einer Filarevolvente liegen in den Tangenten. Nimmt man nun auch einen Punkt in einer Tangente an, so gelangt diese Tangente durch Drehung der Schmiegungebene um die folgende Tangente nicht in die Lage dieser, also jener Punkt auch nicht auf die zweite Tangente, was für die Erzeugung einer Filarevolvente erforderlich ist. Ebenso gelangt der Punkt einer Filarevolvente während er deren Bogenelement beschreibt nicht in die folgende Schmiegungebene, sondern bleibt in der ersten Schmiegungeebene, kann also diese erste Schmiegungebene nicht rechtwinklig schneiden, was zur Erzeugung einer Planevolvente nothwendig ist.

*) Cf. Lancret a. a. O. p. 417.

Cap. IV.

Die Fläche der Krümmungsaxen und die Evoluten.

§. 1. Die Normalebenen einer Reihe aufeinanderfolgender Punkte $M, M', M'', \dots$ einer Curve schneiden sich nach Cap. I, §. 7 in einer Folge Gerader $k, k', k'', \dots$, welche auf den Schmiegungebenen dieser Punkte in den Krümmungsmittelpunkten $C, C', C'' \dots$ derselben senkrecht stehen und die Krümmungsaxen heißen. Diese schneiden sich selbst aufeinanderfolgend in den Punkten $K, K', K'', \dots$ der Gratlinie der Fläche der Krümmungsaxen, deren Erzeugungslinien sie sind, und berühren in ihnen diese Curve K . Die Normalebenen der Punkte M sind Tangentenebenen dieser Fläche längs den Krümmungsaxen k und Schmiegungebenen in den Punkten K der Gratlinie, in denen diese von den Krümmungsaxen berührt wird.

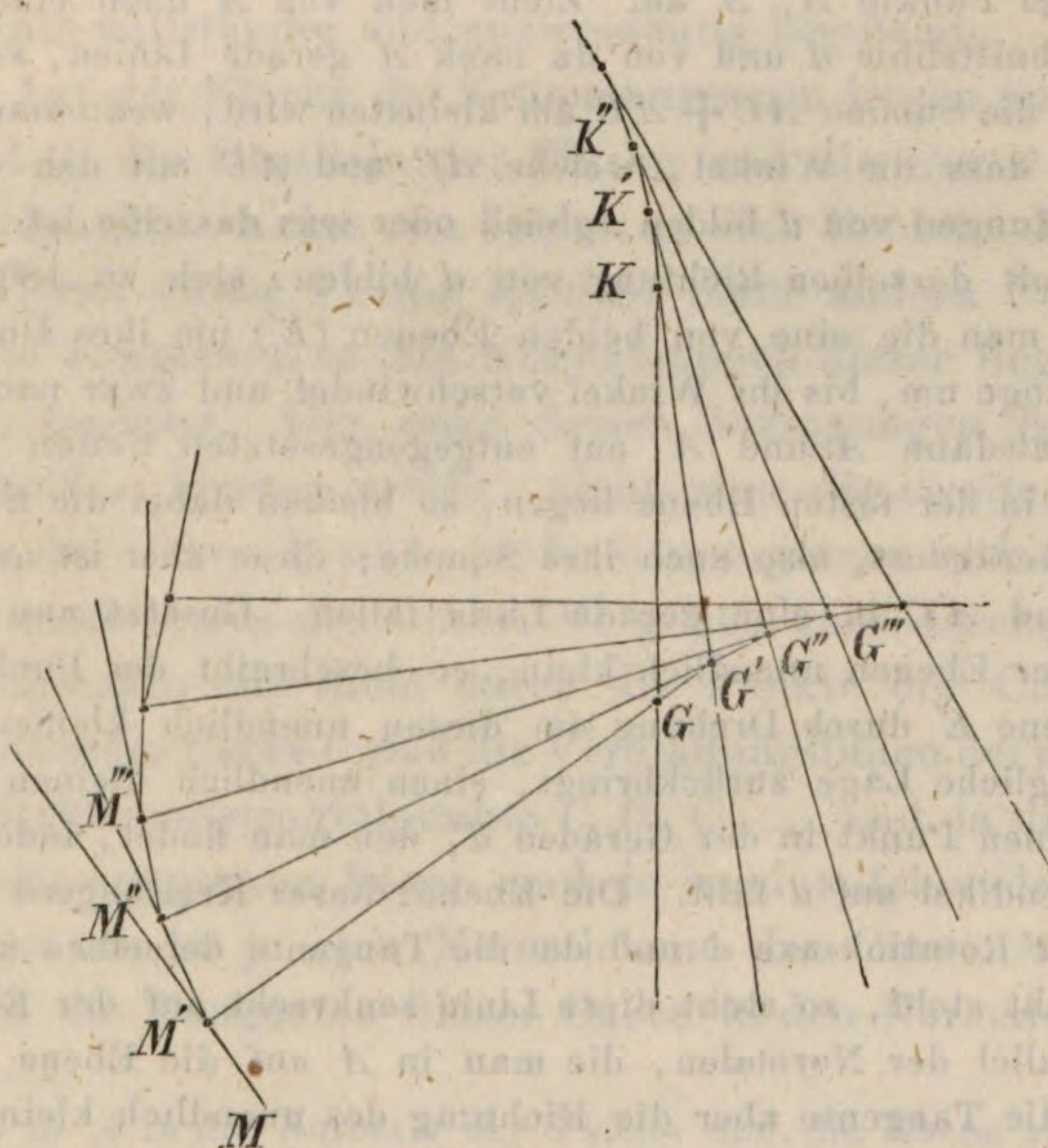
Der Krümmungsmittelpunkt C steht von drei aufeinander folgenden Punkten M, M', M'' gleichweit ab. Aus ihm können daher die beiden Bogenelemente $MM', M'M''$ beschrieben werden, sobald die Schmiegungebene von M gegeben ist. Da die Krümmungsaxe im Mittelpunkt des Krümmungskreises auf dessen Ebene senkrecht steht, so ist jeder ihrer Punkte G Mittelpunkt eines geraden Kegels, dessen Fläche durch den Krümmungskreis geht und daher steht dieser Punkt von allen Punkten des Krümmungskreises, insbesondere also auch von den drei Punkten M, M', M'' gleich weit ab, welche dieser mit der Curve gemein hat. Daher können auch aus G mit GM als Radius die beiden Elemente $MM', M'M''$ beschrieben werden. Bei dieser Beschreibung dreht sich die Ebene des rechtwinkligen Dreiecks GCM um die Krümmungsaxe um, seine Hypotenuse GM beschreibt zwei Elemente jener Kegelfläche, seine Kathete ein unendlich kleines Stück der Schmiegungebene. Ist die Schmiegungebene nicht gegeben, so kann der beschreibende Punkt M dadurch genöthigt werden, sich in ihr zu bewegen, dass man auf der Krümmungsaxe ausser G noch einen zweiten Punkt G' annimmt und das Dreieck GMG' sich um die Krümmungsaxe umdrehen lässt, während seine Seiten unveränderlich bleiben.

§. 2. Die Krümmungsaxe k ist der Durchschnitt der Normalebenen der Punkte M und M' , die folgende Krümmungsaxe k' ebenso der Durchschnitt der Normalebenen von M' und M'' ; beide Krüm-

mungsaxen liegen in der Normalebene des Punktes M' . Zieht man daher in dieser Normalebene von M' nach irgend einem Punkt G der Krümmungsaxe k die Gerade $M'G$, so trifft sie die folgende Krümmungsaxe k' in einem Punkte G' ; zieht man hierauf in der Normalebene des folgenden Punktes M'' die Gerade $M''G'$, so trifft sie ebenso die Krümmungsaxe k'' in einem Punkte G'' . Ebenso schneidet $M'''G''$ die Krümmungsaxe k''' in G''' u. s. f. Hierdurch erhält man auf der Fläche der Krümmungsaxe eine Curve $GG'G''\dots$, deren Tangenten $M'G, M''G', M'''G''$ durch die Punkte der Curve M hindurch gehen und die Tangenten dieser, da sie in deren Normalebenen liegen, rechtwinklig schneiden. Daher ist die Curve M nach Cap. III, §. 3 eine Filarevolvente der Curve G und wird also von dem Punkte M einer beweglichen Geraden beschrieben, welche über die Curve G hingeleitet und sie fortwährend berührt. Die Curve G heisst, weil sie durch die Curve M gewissermassen abgewickelt wird, eine Evolute (Filarevolute) der Curve M .

§. 3. Die Ebene $M'G'M''$ ist die Schmiegungeebene der Evolute im Punkte G ; da sie durch die Tangente der Curve M geht, so steht

Fig. 7.



sie senkrecht auf deren Normalebene oder was dasselbe ist auf der Tangentenebene der Fläche der Krümmungsaxen oder der Schmiegungeebene von deren Gratlinie K . Daher ist die Normalebene

von M die rectificirende Ebene der Evolute und folglich die Fläche der Krümmungsaxen ihre rectificirende Fläche. Wickelt man die Fläche der Krümmungsaxen und zugleich die Evolute ab, indem man jede Normalebene der Curve M um die Krümmungsaxe dreht, bis sie mit der folgenden Normalebene zusammenfällt, so fällt bei diesem Vorgange jede Tangente der Evolute mit der folgenden Tangente zusammen, weil der beschreibende Punkt M nach und nach mit allen Punkten der Curve M coincidirt, daher fallen schliesslich alle Tangenten der Evolute in eine Gerade zusammen, in welche die Evolute selbst übergeht und welche auf der abgewickelten Fläche der Krümmungsaxen liegt. Hieraus folgt, dass die Evolute eine kürzeste Linie auf der Fläche der Krümmungsaxen ist*). (S. Cap. II, §. 2.)

*) Die kürzesten Linien auf krummen Flächen besitzen allgemein die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungebenen durch die Normalen der Fläche gehen, also Normalebenen der Fläche sind. Um diese Eigenschaft elementar zu beweisen, betrachte man zunächst irgend zwei Ebenen, E , E' , welche sich in einer Geraden d schneiden und nehme in ihnen zwei Punkte A , A' an. Zieht man von A nach einem Punkt C der Durchschnittslinie d und von da nach A' gerade Linien, so sieht man leicht, dass die Summe $AC + A'C$ am kleinsten wird, wenn man den Punkt C so wählt, dass die Winkel, welche AC und $A'C$ mit den entgegengesetzten Richtungen von d bilden, gleich oder was dasselbe ist, die Winkel, welche sie mit derselben Richtung von d bilden, sich zu 180° ergänzen. Denn dreht man die eine von beiden Ebenen (E') um ihre Durchschnittslinie d so lange um, bis ihr Winkel verschwindet und zwar nach der Richtung, dass alsdann A und A' auf entgegengesetzten Seiten der Durchschnittslinie in der festen Ebene liegen, so bleiben dabei die Strecken AC und $A'C$ unverändert, also auch ihre Summe; diese aber ist am kleinsten, wenn AC und $A'C$ in eine gerade Linie fallen. Gesetzt nun es war der Winkel beider Ebenen unendlich klein, so beschreibt der Punkt A' , wenn man die Ebene E' durch Drehung um diesen unendlich kleinen Winkel in ihre ursprüngliche Lage zurückbringt, einen unendlich kleinen Kreisbogen $A'A''$, um einen Punkt in der Geraden d , den man findet, indem man von A' ein Perpendikel auf d fällt. Die Ebene dieses Kreisbogens steht senkrecht auf der Rotationsaxe d und da die Tangente derselben auf dem Radius senkrecht steht, so steht diese Linie senkrecht auf der Ebene E und ist also parallel der Normalen, die man in A auf die Ebene E errichten kann. Da die Tangente aber die Richtung des unendlich kleinen Kreisbogens hat, so fällt sie in die Ebene $A'CA''$ oder also in die Ebene der Geraden AC , CA'' . In diese Ebene fällt also auch die in A errichtete Normale der Fläche E . Sind nun die Ebenen E , E' zwei Tangentenebenen einer krummen Fläche in zwei unendlich nahen Punkten, so geht die Nor-

§. 4. Die Gerade $M'G$, welche wir zuerst zogen und welche die Anfangstangente der Evolute bildete, war nach einem beliebigen Punkte G der Krümmungsaxe gerichtet; sobald sie aber construirt war, war damit auch der weitere Verlauf der Evolute vollständig bestimmt. Hieraus folgt, dass jede Curve unendlich viele Evoluten hat, welche auf der Fläche der Krümmungsaxen liegen. Zugleich ist aus Cap. III, §. 8 klar, dass es keine Evolute geben kann, welche nicht auf dieser Fläche läge. Daher also der Satz:

Die Fläche der Krümmungsaxen der Curve M ist der Ort aller Evoluten dieser Curve, sowie die Tangentenfläche der Ort aller ihrer Evolventen ist. Daher heisst sie auch die Evolutenfläche der Curve.

Durch jeden Punkt der Evolutenfläche gibt es eine, aber nur eine einzige Evolute. Denn legt man durch diesen Punkt die Tangentenebene an die Evolutenfläche, so schneidet sie die Curve M in einem Punkte, in welchem sie Normalebene dieser Curve ist. Verbindet man diesen Punkt mit jenem, so ist die Verbindungslinie die Anfangstangente der Evolute, welche durch jenen Punkt hindurch geht. Diese Evolute ist aber durch ihre Anfangstangente vollständig und unzweideutig bestimmt.

§. 5. Auf der Fläche der Krümmungsaxen liegen auch die Curven K und C , die Gratlinie der Fläche und die Curve der Krümmungsmittelpunkte. Keine von beiden ist eine Evolute. Damit nämlich eine Curve dieser Fläche Evolute einer andern Curve M sei, müssen ihre Tangenten in den Normalebenen dieser liegen und die Curve M schneiden. Die erste dieser Bedingungen ist zwar für jede der beiden Curven erfüllt, nicht aber die zweite. Denn die Tangenten der Curve K sind die Krümmungsaxen und diese liegen in den Normalebenen der Curve M , gehen aber durch die Krümmungsmittelpunkte und nicht durch die Punkte der Curve selbst. Die Tangenten der Curve C sind die Verbindungslinien der aufeinander folgenden Krümmungsmittelpunkte $C, C', C'', \dots$ und da diese Punkte in den Krümmungsaxen liegen und je zwei aufeinander folgende Krümmungsaxen in je eine Normalebene der Curve M fallen, so liegen auch die Tangenten dieser Curve in den Normalebenen von

male von E in A in die Normale der Fläche und die Ebene ACA'' in die Schmiegungeebene einer kürzesten Linie zwischen zwei unendlich nahen Punkten über. Die kürzeste Linie zwischen zwei endlich entfernten Punkten muss aber ihren Charakter zwischen allen ihren Punkten, also auch zwischen unendlich nahen Punkten bewahren und daher folgt der obige Satz.

M. Allein sie gehen nicht durch die Punkte dieser Curve selbst, weil sie sonst mit den Hauptnormalen zusammenfallen müssten, die sich nicht schneiden und also auch nicht Tangenten an eine Curve sein können. Nur dann, wenn die Curve *M* eben ist, schneiden sich die Hauptnormalen und berühren die Curve *C*. Nur dann also ist diese Curve eine Evolute, und zwar diejenige, welche in der Ebene der Curve selbst liegt.

In Bezug auf die Curve *K* ist aber die Curve *M* eine Planevolvente (Cap. III, §. 11). Wenn nämlich ihre Schmiegungebene an ihr hingleitet, so beschreibt einer ihrer Punkte die Curve *M*, weil diese Curve die sämtlichen Schmiegungebenen rechtwinklig schneidet. Daher kann die Curve *K* in diesem Sinne eine Planevolute der Curve *M* genannt werden, zum Unterschiede von allen andern Evoluten derselben, welche Filarevoluten sind.

§. 6. Ist die Curve *M* eben, so ist ihre Evolutenfläche nach Cap. I, §. 11 ein Cylinder, dessen Erzeugungslinien senkrecht zur Ebene der Curve sind. Sie hat dann eine ebene Evolute, nämlich die Curve der Krümmungsmittelpunkte, welche der Durchschnitt des Cylinders mit ihrer Ebene ist. Alle andern Evoluten sind Curven doppelter Krümmung.

Ist die Curve sphärisch, so ist ihre Evolutenfläche ein Kegel, dessen Mittelpunkt in den Kugelmittelpunkt fällt. Keine ihrer Evoluten ist eben.

Ist die Curve weder eben noch sphärisch, so ist die Evolutenfläche eine allgemeine abwickelbare Fläche. Eine Cylinderfläche kann nur für ebene, eine Kegelfläche nur für sphärische Curven Evolutenfläche sein. In besonders ausgezeichneten Punkten kann aber eine Curve ebene oder sphärische Beschaffenheit haben; ist dies der Fall, so spricht sich diese Eigenschaft in der Natur ihrer Evolutenfläche aus.

§. 7. Bei der Abwicklung der Evolute beschreibt ein gewisser Punkt ihrer Tangente (des Fadens) die Curve *M*. Um die Bewegung des Fadens zu reguliren, wickelt Monge gleichzeitig zwei Evoluten ab *), der Durchschnitt ihrer Tangenten (der Knoten, in welchem die Fäden verknüpft sind) beschreibt die Curve. Ist also die Evolutenfläche gegeben, so kann man einen Punkt mechanisch nöthigen, die Curve *M* zu beschreiben, indem man zwei Fäden frei über die Fläche hinspannt und sie in einen Knoten zusammenbindet.

*) Cf. Monge, Appliation etc. p. 415.

Bei der Abwicklung einer Evolute beschreiben alle Punkte der beweglichen Tangente parallele Curven und für die ganze Schaar derselben ist die Evolute gemeinschaftlich. Alle diese Curven können auch durch Abwicklung jeder andern Evolute auf der Evolutenfläche erzeugt werden. Aber jede Evolute liefert eine solche Schaar Parallelcuren. Daher ist jede abwickelbare Fläche der Ort der Evoluten einer Doppelschaar paralleler Curven. Sie erfüllen zusammen den äusseren Raum dieser Fläche; in den innern Raum dieser dringt keine von ihnen ein.

§. 8. Alle Evoluten ein und derselben Curve M unterscheiden sich durch die Lage der Tangente $M'G$ von einander. Die Lage dieser Geraden ist durch den Winkel $GM'C$ (Fig. 8), den sie mit der Schmiegungeebene des Punktes M oder, was dasselbe ist, mit dem Krümmungshalbmesser MC (oder $M'C$) bildet, oder auch durch dessen Complement, nämlich den Winkel $M'GC = \vartheta$ den sie mit der Krümmungsaxe des Punktes M bildet, bestimmt, wenn noch die Seite der Schmiegungeebene von M bekannt ist, auf welcher G liegt. Ist letztere nicht bestimmt, so gibt es zwei Evoluten, deren Tangenten $M'G$, $M'g$, die Krümmungsaxe auf entgegengesetzten Seiten der Schmiegungeebene in gleichem Abstand vom Krümmungsmittelpunkte unter demselben Winkel ϑ schneiden.

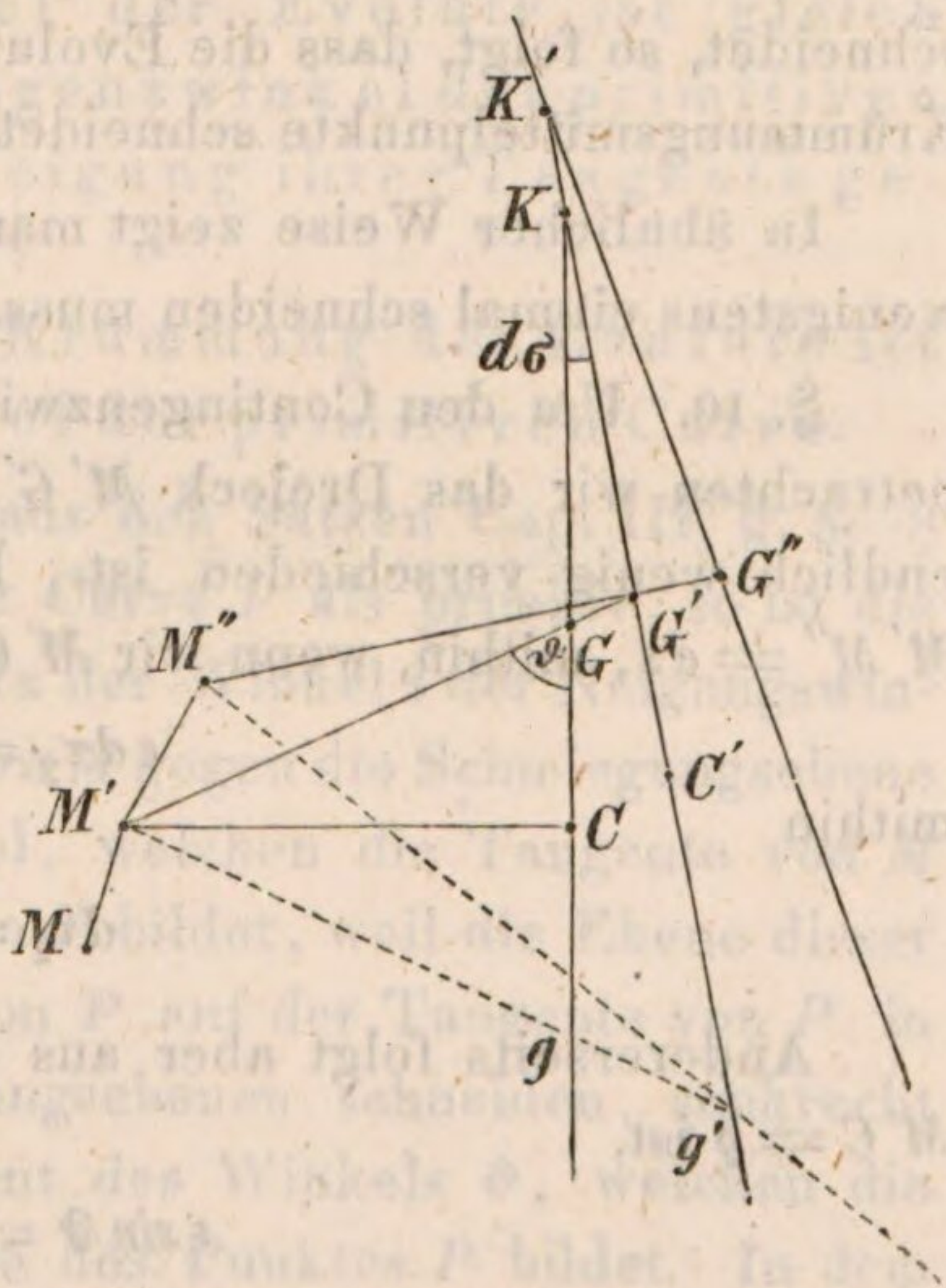
Die Evoluten sind daher um die Curve der Krümmungsmittelpunkte symmetrisch gruppirt, so dass sie paarweise rechts und links von dieser mit derselben Krümmungsaxe gleiche Winkel bilden.

Fig. 8.

§. 9. Um zu sehen, wie der Winkel $\vartheta = M'GC$ sich ändert, welchen die Evolute mit der Krümmungsaxe bildet, hat man Winkel $M''G'C' = \vartheta + d\vartheta$. Da aber die Krümmungsaxe $C'K'$ Axe eines geraden Kegels ist, (§. 1) dessen Mittelpunkt G' ist und welcher durch die drei Punkte M' , M'' , M''' geht, so ist $M'G'C' = M''G'C' = \vartheta + d\vartheta$, mithin die gesuchte Aenderung

$$d\vartheta = M'G'C' - M'GC.$$

Aus dem Dreieck GKG' folgt aber, dass diese Differenz gleich dem



Winkel GKG ist, den die beiden Krümmungsaxen CK und $C'K'$ mit einander bilden. Dieser ist aber der Schmiegunswinkel $d\sigma$ der Curve M , daher ist also

$$d\vartheta = d\sigma$$

d. h.

Die Aenderung des Winkels ϑ , welchen eine Evolute mit der Krümmungsaxe bildet, ist gleich dem Schmiegunswinkel $d\sigma$ der primitiven Curve.

Ist die Curve eben, so ist $d\sigma = d\vartheta = 0$; in diesem Falle ist die Evolutenfläche ein Cylinder und es bildet die Evolute mit dessen Erzeugungslinien einen constanten Winkel. Eine Curve, welche auf einem Cylinder liegt und dessen Erzeugungslinien unter constantem Winkel schneidet, heisst eine Helix oder Schneckenlinie oder auch Schraubenlinie des Cylinders. Die Evoluten ebener Curven sind also sämmtlich Helixe.

Da der Winkel ϑ immer um den Schmiegunswinkel $d\sigma$ zu- oder abnimmt, so folgt, dass er einmal den Werth $\frac{\pi}{2}$ erreicht. Tritt dies ein, so steht die Tangente der Evolute senkrecht auf der Krümmungsaxe und fällt mit dem Krümmungshalbmesser zusammen. Hieraus erkennt man, dass jede Evolute während ihres Verlaufes mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte wenigstens einmal einen Punkt gemein hat und dass sie von dem betreffenden Krümmungshalbmesser in diesem Punkte berührt wird. Da aber der Krümmungshalbmesser die Curve der Krümmungsmittelpunkte nicht berührt, sondern schneidet, so folgt, dass die Evolute in diesem Punkte die Curve der Krümmungsmittelpunkte schneidet.

In ähnlicher Weise zeigt man, dass jede Evolute die Curve K wenigstens einmal schneiden muss.

§. 10. Um den Contingenzwinkel $d\tau_2$ einer Evolute zu finden, betrachten wir das Dreieck $M'G'M''$, welches von MGM' nur unendlich wenig verschieden ist. In demselben ist $M'G'M'' = d\tau_2$, $M'M'' = ds$, mithin, wenn wir $M'G' = MG = \varepsilon$ setzen,

$$\varepsilon d\tau_2 = ds$$

mithin

$$d\tau_2 = \frac{ds}{\varepsilon}$$

Andererseits folgt aber aus dem Dreieck MGC , in welchem $M'C = \varrho$ ist,

$$\varepsilon \sin \vartheta = \varrho = \frac{ds}{d\tau};$$

eliminirt man hieraus ε und ϱ , so kommt

$$d\tau_2 = d\tau \cdot \sin \vartheta$$

d. h.

Der Contingenzwinkel einer Evolute ist gleich dem Produkte aus dem Contingenzwinkel der primitiven Curve in den Sinus des Winkels, welchen die Tangente der Evolute mit der Krümmungsaxe bildet.

Der Contingenzwinkel der Evolute ist daher nie grösser als der Contingenzwinkel der primitiven Curve. Im Durchschnittspunkte der Evolute mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte erreicht $d\tau_2$ sein Maximum $d\tau$.

§. 11. Um den Schmiegunswinkel $d\sigma_2$ und den Winkel der ganzen Krümmung dk_2 einer Evolute zu finden, bedenken wir, dass die Evolutenfläche die rectificirende Fläche der Evolute ist, mithin ist der Winkel dk_2 , den zwei Hauptnormalen der Evolute bilden, gleich dem Winkel zweier Tangentenebenen dieser rectificirenden Fläche, da sie senkrecht zu diesen Hauptnormalen sind. Diese Tangentenebenen sind aber Normalebene der primitiven Curve und ihr Winkel also $d\tau$. Daher ist $dk_2 = d\tau$. Nach dem Lancret'schen Satze muss aber $dk_2^2 = d\tau_2^2 + d\sigma_2^2$ sein und da $d\tau_2 = d\tau \cdot \sin \vartheta$ in §. 10 gefunden ist, so wird

$$\begin{aligned} d\sigma_2 &= d\tau \cdot \cos \vartheta \\ dk_2 &= d\tau \end{aligned}$$

d. h.

Der Schmiegunswinkel der Evolute ist gleich dem Produkt aus dem Contingenzwinkel der primitiven Curve in den Cosinus der Neigung ihrer Tangente gegen die Krümmungsaxe, und:

Der Winkel der ganzen Krümmung der Evolute ist gleich dem Contingenzwinkel der primitiven Curve.

Man kann diese Sätze auch aus den Sätzen Cap. III, §. 5—8 ableiten. Betrachtet man dort die Curve P als primitiv, so ist die Curve M eine ihrer Evoluten und da der Winkel i der Neigungswinkel der Schmiegunsebene der Curve M gegen die Schmiegunsebene von P ist, so ist i auch der Winkel, welchen die Tangente von M mit dem Krümmungshalbmesser von P bildet, weil die Ebene dieser beiden Linien als Normalebene von P auf der Tangente von P , in welcher sich die beiden Schmiegunsebenen schneiden, senkrecht steht. Daher ist i das Complement des Winkels ϑ , welchen die Evolute M mit der Krümmungsaxe des Punktes P bildet. In dem

unendlich kleinen Dreieck $T T Q$ sind nun: $T T'$ der Contingenzwinkel $d\tau_1$, der Curve P , den wir hier mit $d\tau$ bezeichnen, $T' Q = d\sigma$, der Schmiegunswinkel von M , den wir hier als Schmiegunswinkel der Evolute $d\sigma_2$ nennen und $T Q = d\tau$, wofür wir jetzt $d\tau_2$ schreiben müssen, der Contingenzwinkel von M . Aus den dortigen Relationen findet man daher

$$d\tau_2 : d\sigma_2 : dk_2 = \sin \vartheta : \cos \vartheta : 1$$

$$dk_2 = d\tau$$

mithin auch

$$d\tau_2 = d\tau \cdot \sin \vartheta$$

$$d\sigma_2 = d\tau \cdot \cos \vartheta.$$

§. 12. Das Bogenelement $GG' = ds_2$ der Evolute folgt aus dem Dreieck $KG G'$ (Fig. 8). Man hat nämlich

$$GG' : KG = \sin d\sigma : \sin (\vartheta + d\sigma)$$

mithin, wenn man den Abstand des Punktes G der Evolute vom Punkte der Curve K mit ε bezeichnet und abkürzt

$$ds_2 = \varepsilon \cdot \frac{d\sigma}{\sin \vartheta}.$$

Mit Hülfe desselben und der im vorigen §. gefundenen drei Krümmungswinkel $d\tau_2$, $d\sigma_2$, dk_2 findet man die Radien der drei Krümmungen:

$$\varrho_2 = \frac{\varepsilon}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} = \varepsilon \cdot \frac{\varrho}{r \sin^2 \vartheta}$$

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} = \varepsilon \cdot \frac{\varrho}{r \sin \vartheta \cos \vartheta}$$

$$R_2 = \frac{\varepsilon}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} = \varepsilon \cdot \frac{\varrho}{r \sin \vartheta}.$$

Man sieht hieraus, dass diese drei Radien mit ε gleichzeitig wachsen. Eliminirt man ϑ , so ergibt sich noch:

$$\varepsilon = \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{R_2^2}{\varrho_2}$$

und durch Elimination von ε :

$$\varrho_2 \sin \vartheta + r_2 \cos \vartheta = 2 R_2.$$

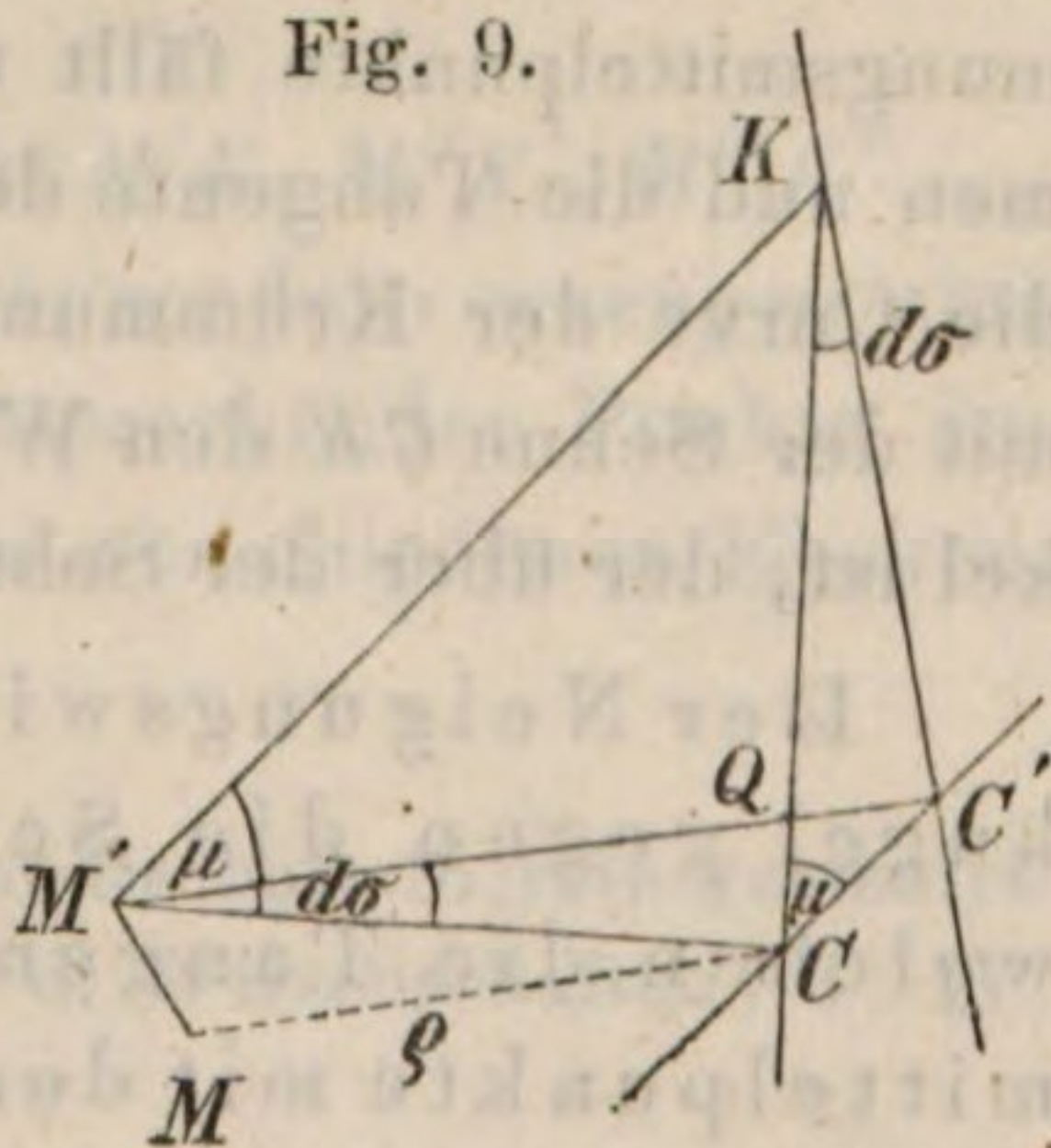
Cap. V.

Die Schmiegunskugel und der gerade Schmiegunskegel.

§ 1. Jeder Punkt der Krümmungsaxe k steht von drei aufeinanderfolgenden Punkten M, M', M'' der Curve gleichweit ab, und ist daher Mittelpunkt einer Kugel, welche durch diese drei Punkte geht und folglich die Curve in der zweiten Ordnung berührt. Die Krümmungsaxe ist daher der Ort für die Mittelpunkte der Schaar Kugeln, welche die Curve in der zweiten Ordnung berührt. Auf jeder von diesen liegt der Krümmungskreis, er ist daher der gemeinsame Durchschnitt aller dieser Kugeln. Unter ihnen giebt es drei ausgezeichnete, nämlich 1) die kleinste von ihnen; ihr Mittelpunkt und Radius sind der Krümmungsmittelpunkt und Krümmungshalbmesser, denn von allen Punkten der Krümmungsaxe hat der Krümmungsmittelpunkt den kürzesten Abstand von der Curve; 2) die grösste, nämlich die Schmiegungeebene, welche einem unendlich grossen Radius entspricht und den unendlich fernen Punkt der Krümmungsaxe zum Mittelpunkt hat und 3) eine Kugel, deren Mittelpunkt im Durchschnitt K der Krümmungsaxe k mit der folgenden Krümmungsaxe k' liegt. Weil dieser Punkt in der Krümmungsaxe k liegt, so geht die Kugel durch die Punkte M, M', M'' und weil er der Krümmungsaxe k' angehört, durch die Punkte M', M'', M''' . Diese Kugel hat daher vier aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'', M''' mit der Curve gemein und berührt sie inniger, als alle anderen, überhaupt so innig als eine Kugel berühren kann, da dieselbe durch vier Punkte bestimmt ist, nämlich in der dritten Ordnung. Wir nennen sie die Schmiegunskugel der Curve im Punkte M . Auf ihr liegen die Krümmungskreise zweier aufeinanderfolgender Punkte M, M' der Curve.

Der Ort der Mittelpunkte aller Schmiegunskugeln der Curve M ist die Gratlinie K der Fläche der Krümmungsaxen.

§ 2. Um den Radius $KM = KM' = \overset{*}{R}$ (Fig. 9) der Schmiegunskugel und seine Neigung $KMC = KM'C = KM''C = \mu$ gegen die Schmiegungeebene zu bestimmen, stelle die Ebene der Figur $M'CC'K$ die



Normalebene des Punktes M' dar. In ihr liegen die beiden Krümmungsaxen CK , $C'K$, welche mit einander den Schmiegunswinkel $d\sigma$ bilden, die Hauptnormale $M'C'$ von M' und ihre Projection MC auf die Schmiegungebene von M , welche beide Linien die Krümmungsaxen in den Krümmungsmittelpunkten C' , C der Punkte M' , M treffen und mit einander gleichfalls den Winkel $d\sigma$ bilden und der Winkel $KM'C = \mu$. Ist Q der Durchschnitt der Krümmungsaxe CK mit der Hauptnormalen $M'C'$, so folgt, weil das rechtwinklige Dreieck $M'CQ$ unendlich schmal ist, $M'Q = M'C = MC = \rho$ und da $M'C' = \rho + d\rho$ ist, so wird $QC' = d\rho$. In dem Dreieck KQC' ist ferner $KQ \cdot d\sigma = QC'$ und folglich in der Grenze, wenn wir den Abstand KC des Mittelpunktes der Schmiegunskugel von der Schmiegungebene (dem Krümmungsmittelpunkte) mit h bezeichnen: $h d\sigma = d\rho$, mithin

$$h = \frac{d\rho}{d\sigma}$$

oder auch wegen

$$r = \frac{ds}{d\sigma}$$

$$h = r \cdot \frac{d\rho}{ds}$$

Mit Hülfe dieses Werthes folgt sofort aus dem rechtwinkligen Dreieck $KM'C$ für den Radius der Schmiegunskugel und seine Neigung gegen die Schmiegungebene:

$$R^2 = \rho^2 + h^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 = \rho^2 + r^2 \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{h}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{r}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{ds}$$

§. 3. Da sowohl der Winkel $M'CK$, als auch $M'C'K$ ein rechter ist, so liegen die vier Punkte M' , C , C' , K in einem Kreise, welcher über dem Schmiegunsradius $M'K$ als Durchmesser beschrieben werden kann. Die Linie CC' oder das Element der Curve der Krümmungsmittelpunkte fällt mit einem Elemente dieses Kreises zusammen und die Tangente des Kreises in C ist folglich die Tangente an die Curve der Krümmungsmittelpunkte. Da diese Tangente aber mit der Sehne CK den Winkel μ bildet, welcher der Peripheriewinkel ist, der über der Sehne steht, so folgt:

Der Neigungswinkel des Radius der Schmiegunskugel gegen die Schmiegungebene und der Winkel, welchen die Tangente an die Curve der Krümmungsmittelpunkte mit der Krümmungsaxe bildet sind gleich.

§. 4. Ist der Krümmungshalbmesser ρ constant und die Curve nicht eben, d. h. $d\sigma$ nicht gleich Null, so wird $h=0$ und $\bar{R}=\rho$, also ebenfalls constant, d. h.

Bei allen Curven doppelter Krümmung von constantem Krümmungshalbmesser ist auch der Radius der Schmiegunskugel constant, nämlich gleich dem Krümmungshalbmesser und fällt die Curve der Mittelpunkte der Schmiegunskugeln mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte zusammen.

Ist ρ constant und $d\sigma=0$ d. h. die Curve ein Kreis, so wird h und hiemit $\bar{R}$ und die Schmiegunskugel selbst unbestimmt. Jede durch den Kreis gehende Kugel kann als Schmiegunskugel desselben angesehen werden.

Ist die Curve eben, also $d\sigma=0$ aber ρ nicht constant, so wird $h=\infty$, $\bar{R}=\infty$; die Schmiegunskugel geht in die Schmiegunsebene über. Für sphärische Curven wird $\bar{R}$ constant und gleich dem Radius der Kugel, auf welcher die Curve liegt. Die sämtlichen Schmiegunskugeln fallen mit dieser zusammen, da die Curve K sich auf den Mittelpunkt dieser zusammenzieht.

Die Betrachtung der Schmiegunskugel zeigt, dass jede Curve doppelter Krümmung in Bezug auf drei aufeinanderfolgende Elemente als sphärisch angesehen werden kann. Auch eine ebene Curve ist in gewissem Sinne als sphärisch zu betrachten, nämlich als auf einer unendlich grossen Kugel liegend. Begründet man ein räumliches Beziehungssystem der Art, dass einer Kugel wieder eine Kugel und allen Punkten auf jener Punkte auf dieser entsprechen, so entspricht der unendlich grossen Kugel des einen Systems eine bestimmte Kugel des andern, also einer ebenen Curve eine sphärische und es können die Eigenschaften der sphärischen Curven aus denen der ebenen Curven abgeleitet werden. Ein solches Beziehungssystem hat Möbius aufgestellt *).

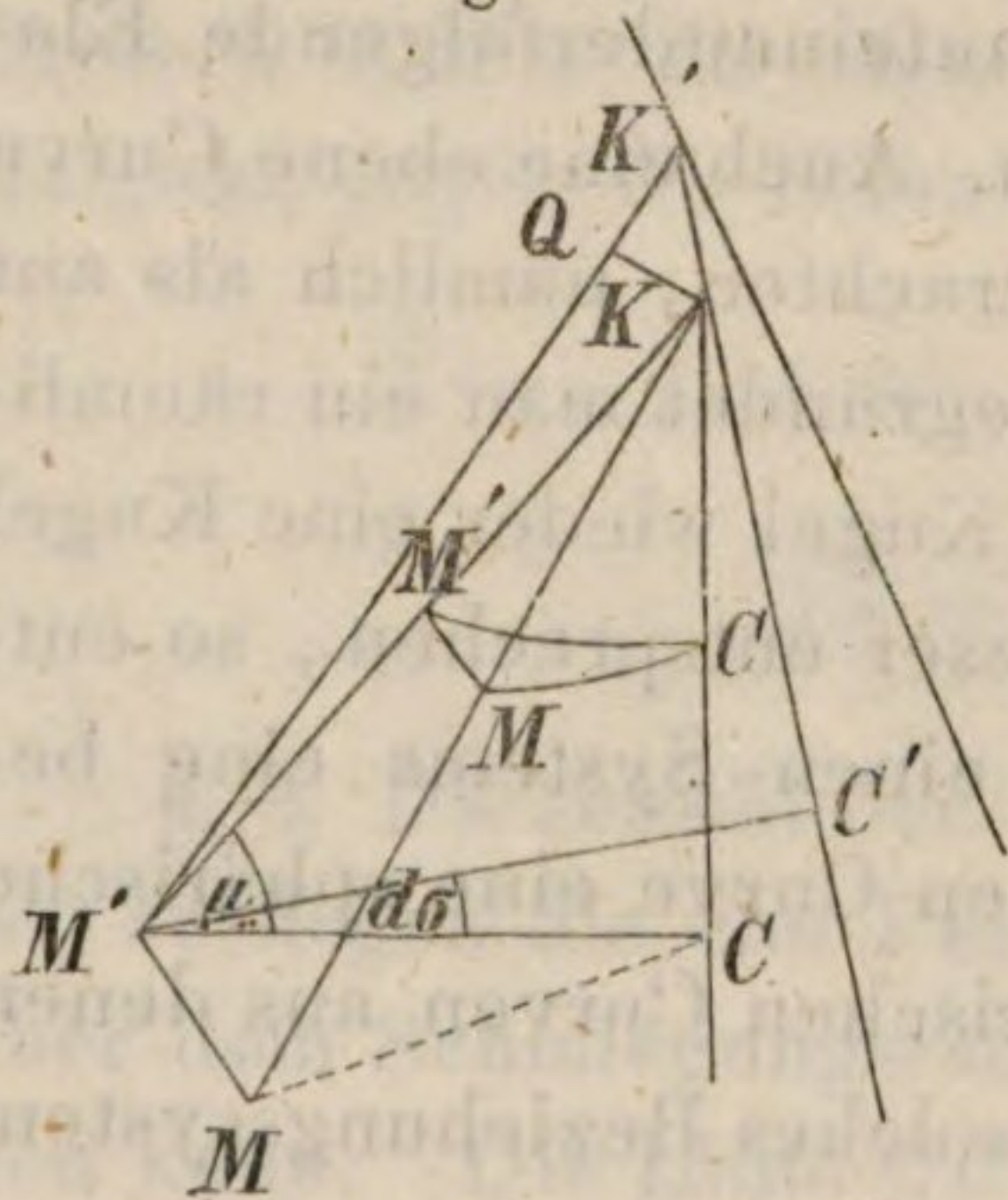
§. 5. Die aufeinanderfolgenden Radien $M'K$, $M''K'$, $M'''K''$, ... der Schmiegunskugeln schneiden sich nicht, sondern erzeugen eine windschiefe Fläche, welche durch die entsprechenden Punkte der Curve M und K geht. Sie liegen nämlich in verschiedenen Ebenen,

*) Cf. Möbius, die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. (Abhdl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissenschaften, T. IV, p. 572).

den Normalebene der Curve M und treffen die Durchschnittslinien dieser, die Krümmungsaxen, in verschiedenen Punkten $K, K', \dots$. Nur in einem Falle geht die Fläche dieser Radien in eine abwickelbare Fläche über, nämlich dann, wenn die Curve K sich auf einen Punkt reducirt, wie es bei den sphärischen und ebenen Curven der Fall ist, bei welchen diese Fläche eine Kegelfläche, resp. Cylinderfläche ist.

§. 6. Um den Winkel $d\omega$ zu bestimmen, den die Radien $KM, K'M'$ zweier aufeinanderfolgender Schmiegunskugeln mit einander bilden, betrachten wir das windschiefe Viereck $MM'K'K$ (Fig. 10), in welchem die beiden Seiten MM', KK' die Bogenelemente der Curven M und K sind und ziehen in diesem die Diagonale $M'K$. Die Ebenen der beiden Dreiecke MKM' und $KM'K'$, welche das Viereck bilden, sind senkrecht zu einander, denn die erste von ihnen geht durch die Tangente MM' , die zweite ist die Normalebene in M' . Zieht man daher durch K eine Parallele Km' (Fig. 11) zu dem zweiten Radius $K'M'$, so bilden die drei Geraden KM, KM', Km' eine an der Kante KM' rechtwinklige unendlichkleine dreiflächige Ecke, welche auf einer mit der Einheit als Radius um K beschriebenen Kugel ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck bestimmt, in welchem

Fig. 10.

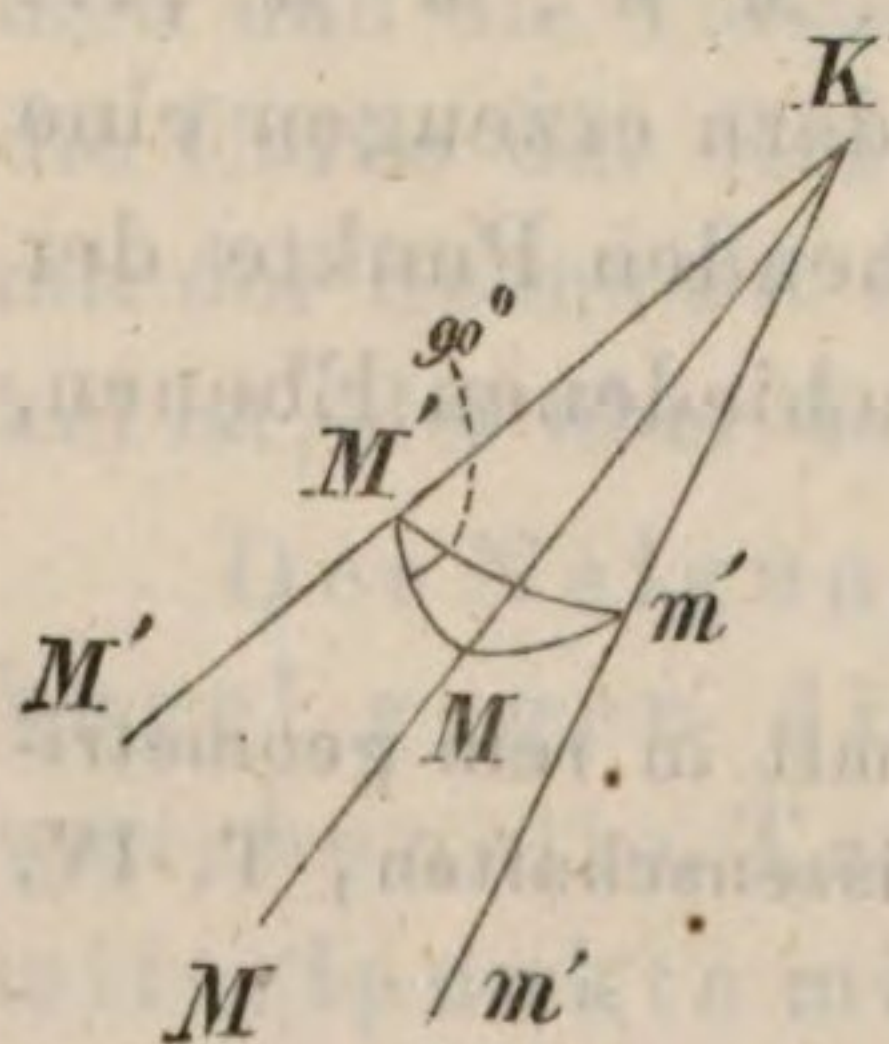


die Seite Mm' den Winkel $d\omega$ der beiden Radien der Schmiegunskugeln misst. Bezeichnen wir einstweilen die beiden andern Seiten $M'm'$ und MM' mit $d\alpha$ und $d\beta$, so wird

$$d\omega^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

Um den Winkel $d\alpha$ zu finden, berücksichtigen wir, dass in der Normalebene des Punktes M' die vier in M' sich schneidenden Linien $M'C, M'C', M'K, M'K'$

Fig. 11.



die Winkel bilden $CM'C' = d\sigma$, $CM'K = \mu$, $C'M'K' = \mu + d\mu$, dass folglich der Winkel $KM'K' = CM'K' - CM'K = d\sigma + \mu + d\mu - \mu = d\sigma + d\mu$ wird. Dieser Winkel ist aber gleich $d\alpha$, da die Grade Km' mit $K'M'$ parallel gezogen wurde. Daher ist also

$$d\alpha = d\sigma + d\mu.$$

Um aber den Winkel $d\beta$ zu bestimmen fassen wir die von den drei Linien KM, KM' and KC ge-

bildete Ecke ins Auge, welche in dem ihr entsprechenden sphärischen Dreiecke CMM' zwei gleiche Seiten $CM = CM' = \frac{\pi}{2} - \mu$ hat während die dritte Seite $M'M = d\beta$ und der Winkel $C = d\tau$, nämlich gleich dem Winkel der Normalebenen MKC und $M'KC'$ ist. Daher hat man

$$d\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) \cdot d\tau = d\tau \cdot \cos\mu.$$

Führt man jetzt die Werthe für $d\alpha$, $d\beta$ in die obige Gleichung ein, so wird

$$d\omega^2 = (d\sigma + d\mu)^2 + d\tau^2 \cdot \cos^2\mu.$$

§. 7. Der Winkel $d\omega$ misst die Abweichung der Curve von der Kugelfläche; den reciproken Werth einer Länge S , welche durch die Gleichung $S \cdot d\omega = ds$ bestimmt wird, nämlich

$$\frac{1}{S} = \frac{d\omega}{ds}$$

nennen wir die sphärische Torsion der Curve im Punkte M und die Linie S selbst, nämlich

$$S = \frac{ds}{d\omega}$$

den Radius der sphärischen Torsion *).

§. 8. Das Bogenelement $KK' = ds^*$ der Curve der Schmiegun-
gkugelmittelpunkte erhält man leicht, indem man von K auf den Ra-
dius $M'K'$ ein Perpendikel KQ fällt (Fig. 10). Es ist nämlich
 $MK = R^*$, $M'K' = R + dR^*$ und $MK = M'K = M'Q$, mithin $K'Q$
 $= dR^*$; ferner ist $\sphericalangle MK'C' = \frac{\pi}{2} - (\mu + d\mu)$ und daher in dem un-
endlichkleinen rechtwinkligen Dreiecke $KK'Q$

$$K'Q : KK' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\mu\right) = \sin\mu$$

und hieraus

$$ds^* = \frac{dR^*}{\sin\mu}.$$

Nun ist aber

$$\sin\mu = \frac{h}{R^*}, \quad h = \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{r d\varrho}{ds},$$

daher schliesslich

$$ds^* = \frac{R^* dR^*}{d\varrho} \cdot d\sigma = \frac{R^* dR^*}{r d\varrho} ds.$$

*) Vergl. meine Abhandlung: Ueber die Schmiegun-
gskugel und die
sphärische Torsion der Curven doppelter Krümmung. (Archiv für Mathem.
u. Physik v. Grunert. Thl. XIX. S. 393.)

Nebenbei folgt noch aus dem Dreieck $M'KK'$

$$\overset{*}{R} (d\sigma + d\mu) = \text{Cotg } \mu \cdot d\overset{*}{R}$$

und mithin, wenn man für $\text{Cotg } \mu$ seinen Werth $\frac{\varrho}{h}$ oder $\frac{\varrho d\sigma}{d\varrho}$ einsetzt:

$$d\sigma + d\mu = \frac{\frac{d\overset{*}{R}}{\overset{*}{R}}}{\frac{\varrho}{d\varrho}} \cdot d\sigma.$$

§. 9. Die drei Winkel: Contingenzwinkel $d\tau$, Schmiegunswinkel $d\sigma$ und Winkel der ganzen Krümmung dk der Curve K haben die Werthe:

$$d\tau = d\sigma, d\sigma = d\tau, dk = dk$$

Daher sind die Radien der drei Krümmungen für diese Curve:

$$\overset{*}{R} \cdot \frac{d\overset{*}{R}}{d\varrho}, \frac{\overset{*}{R}\varrho}{r} \cdot \frac{d\overset{*}{R}}{d\varrho}, \frac{\overset{*}{R}R}{r} \cdot \frac{d\overset{*}{R}}{d\varrho}.$$

§. 10. Jeder Punkt der Krümmungsaxe ist der Mittelpunkt eines geraden Kegels, welcher mit der Curve drei aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'' gemein hat, diese also in der zweiten Ordnung berührt. Die Krümmungsaxe ist also gleichzeitig der Ort einer Schaar die Curve in der zweiten Ordnung berührender Kugeln und gerader Kegelflächen. In der Schaar Kegel, welche sämmtlich durch den Krümmungskreis hindurch gehen, sind drei besonders ausgezeichnet, nämlich: 1) die Schmiegungeebene; sie stellt den Kegel dar, dessen Mittelpunkt in den Krümmungsmittelpunkt C fällt, 2) der Cylinder, dessen Erzeugungslinien parallel der Krümmungsaxe laufen, er ist ein Kegel, dessen Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt der Krümmungsaxe ist, und 3) ein Kegel, welcher mit der Curve noch einen vierten Punkt M''' gemein hat und sie also in der dritten Ordnung berührt. Diesen Kegel, den wir sofort näher bestimmen wollen, nennen wir den geraden Schmiegungskegel der Curve im Punkte M , weil er von allen derjenige ist, welcher sich der Curve am innigsten anschmiegt.

Denken wir uns nämlich die Reihe der Kugeln und ihrer Mittelpunkte Γ auf der Krümmungsaxe, sowie die Reihe der Kegel und ihrer Mittelpunkte Σ auf derselben Geraden, so wird jede Kugel von einem gewissen dieser Kegel längs des Krümmungskreises be-

rührt und die Mittelpunkte Γ , Σ dieser Flächenpaare liegen auf entgegengesetzten Seiten der Schmiegungebene und des Krümmungsmittelpunktes C so, dass das Produkt der Abstände $C\Gamma$, $C\Sigma$ eine Constante, nämlich gleich dem Quadrat der Krümmungshalbmessers ϱ , also

$$C\Gamma \cdot C\Sigma = \varrho^2$$

ist und die Dreiecke $\Sigma M\Gamma$, $\Sigma M'\Gamma$, $\Sigma M''\Gamma$ bei M , M' , M'' rechtwinklig sind, d. h. die Kegelseiten senkrecht auf den Radien der Kugel stehen. Rückt der Punkt Γ in den Krümmungsmittelpunkt C , so entfernt sich der Mittelpunkt Σ des berührenden Kegels ins Unendliche und geht dieser in den vorhin erwähnten Cylinder über; rückt Γ ins Unendliche, so fällt Σ in den Krümmungsmittelpunkt und es gehen die beiden Flächen, Kugel und Kegel in die Schmiegungebene über. Lassen wir nun die Kugel in die Schmiegungekugel übergehen, also ihren Mittelpunkt Γ in den Durchschnitt K der Krümmungsaxe mit der folgenden Krümmungsaxe fallen. Die Kugel geht alsdann durch die vier aufeinanderfolgenden Punkte M , M' , M'' , M''' von denen die drei ersten M , M' , M'' auf dem Krümmungskreise des Punktes M , der vierte, M''' , aber auf dem Krümmungskreise des nächstfolgenden Punktes M' liegt und von dem ersten Krümmungskreis unendlich wenig absteht. Legen wir daher durch die Krümmungsaxe und diesen Punkt eine Ebene, so schneidet sie den ersten Krümmungskreis in einem gewissen Punkte N , welcher dem Punkte M''' unendlich nahe liegt und es ist folglich eine Gerade, welche durch diese beiden Punkte geht, eine Tangente der Kugel in N und da sie die Krümmungsaxe schneidet die Erzeugungsline eines geraden Kegels, welcher die Kugel längs des Krümmungskreises berührt. Dieser Kegel geht durch die vier Punkte der Curve, welche die Schmiegungekugel mit dieser gemein hat und ist also der obige Schmiegungekegel. Der Abstand seines Mittelpunktes S von dem Krümmungsmittelpunkte C ergibt sich aus der Gleichung $CS \cdot CK = \varrho^2$ und wenn wir ihn mit k bezeichnen und für $CK = h$ seinen Werth einsetzen, so wird er

$$k = \frac{\varrho^2}{h} = \varrho^2 \cdot \frac{d\sigma}{d\varrho} = \frac{\varrho^2}{r} \cdot \frac{ds}{d\varrho}.$$

Die Neigung der Kegelseite SM gegen die Schmiegungebene ist $\frac{\pi}{2} - \mu$ und folglich ihre Neigung gegen die Krümmungsaxe selbst gleich μ . Da auch die Tangente der Curve der Krümmungsmittelpunkte mit der Krümmungsaxe denselben Winkel μ bildet, so bildet

diese Axe mit ihr und der Kegelseite ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis in die Krümmungsaxe fällt.

§. 11. Die Betrachtung des Schmiegungskegels zeigt, dass jede Curve doppelter Krümmung in Bezug auf drei aufeinanderfolgende Elemente als auf einem geraden Kegel liegend angesehen werden kann.

Ist die Curve eben, so wird $h = \infty$, mithin $k = 0$, der Schmiegungskegel fällt mit der Ebene der Curve zusammen. Ist die Curve sphärisch, so wird der Radius der Schmiegunskugel constant und da $KS \cdot KC = \overset{*}{R}^2$, so wird die Entfernung KS des Kegelmittelpunkts vom Mittelpunkt der Kugel, auf welcher die Curve liegt, nämlich

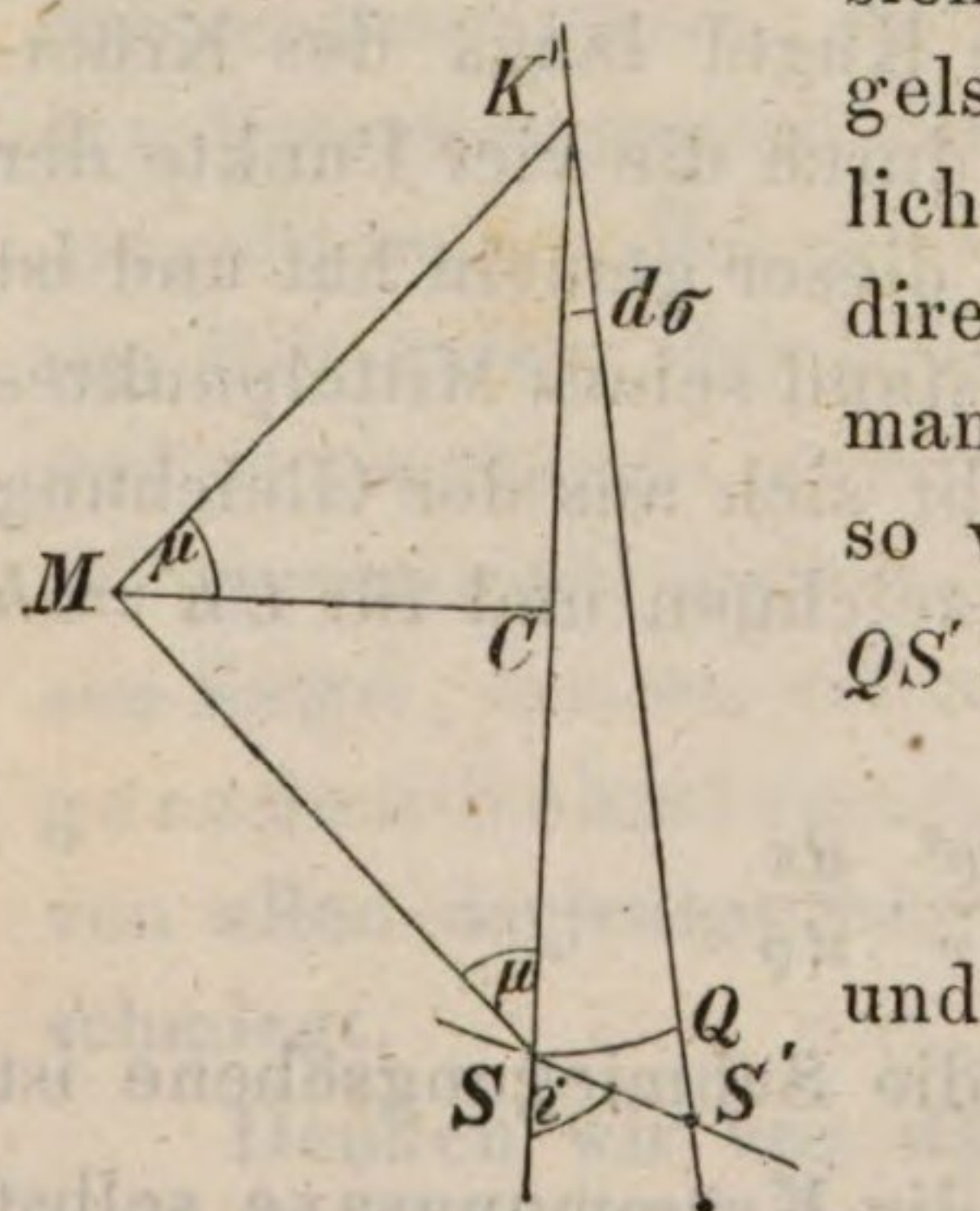
$$KS = \frac{\overset{*}{R}^2}{KC}$$

umgekehrt proportional dem Abstand der Schmiegungebene vom Mittelpunkt der Kugel.

Ist ρ constant, so wird $h = 0$ und also $k = \infty$, d. h. der Schmiegungskegel ist ein Cylinder, die Curve kann hinsichtlich dreier Elemente als cylindrisch angesehen werden.

§. 12. Die continuirliche Folge der Mittelpunkte der Schmiegungskegel bildet auf der Fläche der Krümmungsaxen eine Curve S ; zwischen ihr und der Curve K liegt die Curve C inne und zwar so, dass immer $CK \cdot CS = \rho^2$, $KS \cdot KC = \overset{*}{R}^2$ ist. Diese Curve ist keine Evolute. Denn sind S, S' (Fig. 12) zwei aufeinanderfolgende

Fig. 12.



Punkte derselben, also SS' ihre Tangente, so sieht man leicht, dass diese nicht mit der Kegelseite MS zusammenfallen kann. Sind nämlich K, K' die den Punkten S, S' correspondirenden Punkte der Curve K und beschreibt man um K mit KS den kleinen Bogen KQ , so wird

$$\begin{aligned} QS' &= K'S' - KQ - KK' = K'S' - KS - KK' \\ &= d(SK) + \overset{*}{ds} = d\left(\frac{\overset{*}{R}^2}{h}\right) + \overset{*}{ds} \end{aligned}$$

$$QS = KS \cdot d\sigma = \frac{\overset{*}{R}^2}{h} \cdot d\sigma,$$

mithin, wenn i die Neigung der Tangente der Curve S gegen die Krümmungsaxe SK ist,

$$\text{Cotg } i = \frac{d\left(\frac{R^2}{h}\right)}{\frac{R^2}{h} \cdot d\sigma} + \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\frac{R^2}{h} \cdot d\sigma}$$

während für die Neigung der Kegelseite MS gegen dieselbe Axe die Gleichung

$$\text{Cotg } \mu = \frac{\varrho}{h}$$

besteht.

Die Länge der Kegelseite MS ist offenbar $MS = \frac{R\varrho}{h}$. Ist sie constant, so ist die Curve S zugleich der Ort Mittelpunkte einer Schaar Kugeln von constantem Radius, welche die Curve in der zweiten Ordnung berühren.

Cap. VI.

Die rectificirende Fläche.

§. 1. Die Schmiegungebene und die rectificirende Ebene sind ein Paar zu einander rechtwinklige Tangentenebenen der Curve. Die rectificirende Ebene steht senkrecht auf der Hauptnormalen (dem Krümmungshalbmesser). Vgl. Cap. I. §§. 4 u. 8. Zwei aufeinanderfolgende rectificirende Ebenen schneiden sich in der rectificirenden Geraden, einer Linie, welche senkrecht ist zu zwei aufeinanderfolgenden Krümmungshalbmessern oder also senkrecht zu der Ebene, welche diesen beiden parallel läuft, der Ebene der ganzen Krümmung (Cap. II, §. 14).

Lässt man eine Ebene so an der Curve hingleiten, dass sie fortwährend rectificirende Ebene bleibt, so erzeugt sie die rectificirende Fläche, welche abwickelbar ist und die sämtlichen rectificirenden Graden der Curve enthält. Der Name dieser Fläche rührt daher, dass sie die Eigenschaft hat, durch ihre Abwicklung die Curve in eine Gerade zu verwandeln. Bei dieser Abwicklung fallen nämlich nach und nach die rectificirenden Ebenen der Punkte $M, M', M'', M''', \dots$ der Curve zusammen, indem jede um die Durchschnittslinie mit der folgenden, d. h. um die rectificirende Gerade gedreht wird, bis der Winkel beider verschwindet.

Da die Krümmungshalbmesser zu diesen Ebenen senkrecht sind, so werden sie durch die Abwicklung sämmtlich parallel. Nun liegt der Krümmungshalbmesser des Punktes M in der Schmiegungeebene $MM'M''$ dieses Punktes, welche durch die Tangenten in M und M' geht und senkrecht steht auf der rectificirenden Ebene von M und da nach der Drehung der rectificirenden Ebene um die rectificirende Gerade der folgende Krümmungshalbmesser mit ihm parallel wird, so fällt dadurch auch dieser in die Schmiegungeebene von M . Er liegt aber auch in der folgenden Schmiegungeebene $M'M''M'''$, welche durch die Tangenten in M' und M'' geht und da diese Ebene durch ihn und die Tangente in M' bestimmt ist und von diesen beiden Linien die Tangente bereits in der ersten Schmiegungeebene liegt, die andre, der Krümmungshalbmesser durch die Drehung in sie gelangt, so fällt auch die zweite Schmiegungeebene mit der ersten zusammen und da diese vereinigten Schmiegungeebenen auf den vereinigten rectificirenden Ebenen senkrecht stehen, so fallen auch ihre Durchschnittslinien, nämlich die Tangenten der Punkte M und M' zusammen. In gleicher Weise fällt bei der Drehung der jetzt vereinigten rectificirenden Ebene um die folgende rectificirende Gerade, die Tangente von M'' mit der vorhergehenden zusammen, desgleichen durch eine Drehung der drei vereinigten Ebenen um die nächste rectificirende Gerade die Tangente von M''' mit der Tangente von M'' , u. s. f. Man sieht hieraus, dass durch die Abwicklung der rectificirenden Fläche nach und nach alle Tangenten der Curve in eine Gerade und alle Schmiegungeebenen in eine Ebene zusammenfallen, d. h. dass die Curve in eine Gerade übergeht.

Man hätte diesen Satz auch folgendermassen beweisen können. Zwei aufeinanderfolgende rectificirende Ebenen bilden mit einander den Winkel dk der beiden auf ihnen senkrechten Krümmungshalbmesser und es ist nach dem Lancret'schen Satze $dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2$. Durch die Abwicklung verschwindet dk ; dies ist nicht anders möglich, als dadurch, dass gleichzeitig $d\tau$ und $d\sigma$ verschwinden. Wenn aber der Contingenzwinkel und Schmiegungewinkel einer Curve verschwinden, so wird sie eine Gerade.

§. 2. Da die Curve durch Abwicklung der rectificirenden Fläche in eine Gerade übergeht, so ist sie selbst eine kürzeste Linie auf dieser Fläche. Die rectificirende Fläche erlangt dadurch eine statische Bedeutung für die Curve. Die kürzeste Linie auf irgend einer Fläche besitzt nämlich die Eigenschaft, dass eine vollkommen biegsame Linie längs ihr auf der Fläche ohne Reibung

im Gleichgewichte ist, wenn ihre Enden durch gleiche Kräfte gespannt werden *). Es ist daher das geometrische Problem, die rectificirende Fläche einer Curve zu finden, identisch mit dem statischen Problem, diejenige abwickelbare Fläche zu bestimmen, auf welcher sich die Curve im Gleichgewicht befinden würde, wenn sie in der Richtung zweier ihrer Tangenten durch gleiche Kräfte gespannt wird.

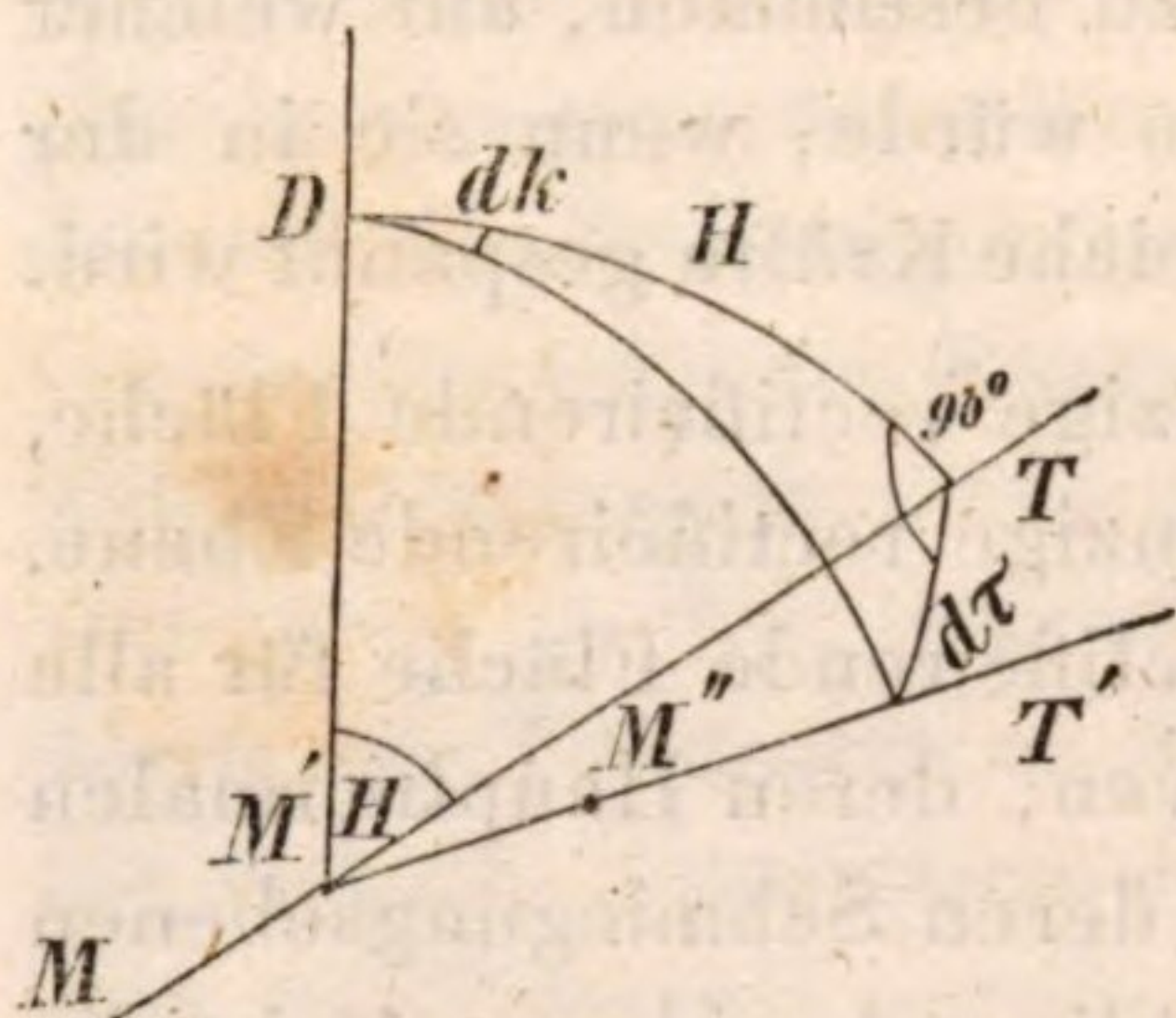
§. 3. Jede Curve hat nur eine einzige rectificirende Fläche, denn sie hat in jedem Punkte nur eine einzige rectificirende Ebene. Dagegen ist jede abwickelbare Fläche rectificirende Fläche für alle ihre kürzesten Linien, d. h. für alle Curven, deren Hauptnormalen zugleich Normalen der Fläche sind, oder deren Schmiegungebenen die Tangentenebenen der Fläche rechtwinklig schneiden. So ist die Fläche der Krümmungsaxen gemeinsame rectificirende Fläche für alle auf ihr liegende Evoluten.

§. 4. Die Tangentenfläche, die Fläche der Krümmungsaxen und die rectificirende Fläche haben eine intime Beziehung zu den Krümmungen der Curve. Durch Abwicklung der ersteren wird der Schmiegunswinkel und mit ihm die erste Krümmung, durch Abwicklung der zweiten der Contingenzwinkel und mit ihm die zweite Krümmung, durch Abwicklung der rectificirenden Fläche aber werden beide Krümmungen zugleich, oder die ganze Krümmung der Curve zerstört. Durch Abwicklung der ersten und dritten Fläche geschieht dies an der Curve selbst, durch Abwicklung der zweiten an einer Curve, welche ihren Contingenzwinkel zum Schmiegunswinkel hat.

*) Denn damit irgend ein Punkt des Fadens im Gleichgewichte sei, müssen die Spannungen längs den Tangenten der Curve, die sich in dem Punkte schneiden mit dem normalen Widerstande der Fläche im Gleichgewicht sein. Es muss folglich die Resultante dieser Spannungen die Richtung der Linie haben, welche die von 180^0 unendlich wenig abweichenden Winkel der Tangenten halbirt und also mit den Richtungen dieser Kräfte in einer Ebene liegen, welche durch die Normale der Fläche geht. Jene Winkelhalbirende aber ist in der Grenze eine Normale der Curve in dem Endpunkte eines der Bogenelemente, welche in dem betrachteten Punkte zusammenstossen und da sie in die Ebene dieser Elemente, nämlich in die Schmiegungebene der Curve fällt, die Hauptnormale der Curve. Da die Resultante dem Normaldruck der Fläche Gleichgewicht halten muss, so muss also die Hauptnormale der Curve zugleich Normale der Fläche, also die Schmiegungebene eine Normalebene der Fläche und die Curve folglich eine kürzeste Linie sein. (Vergl. Cap. IV, §. 3. Anm.)

§. 5. Wir wollen jetzt den Winkel H bestimmen, den die rectificirende Gerade eines Punktes M mit der Tangente desselben bildet.

Fig. 13.



Sind MT , $M'T'$ die Tangenten zweier aufeinanderfolgender Punkte M , M' und ist ferner $M'D$ die Durchschnittslinie der beiden rectificirenden Ebenen $TM'D$, $T'M'D$, von denen die erste auf der Schmiegungeebene $TM'T$, die andere auf der folgenden Schmiegungeebene senkrecht steht, so bestimmen die drei Geraden $M'T$, $M'T'$, $M'D$ auf einer um M' mit der Linieneinheit beschriebenen Kugel das Dreieck DTT' , in welchem die Seite TT' den Contingenzwinkel $d\tau$ und DT den gesuchten Winkel H misst, während Winkel $TD T' = dk$, nämlich gleich dem Winkel der beiden rectificirenden Ebenen, Winkel $DT T' = 90^\circ$ und W. $DT'T = 90^\circ - d\sigma$ ist, weil nämlich die rectificirende Ebene $T'M'D$ nicht auf der Schmiegungeebene $TM'T'$, sondern auf der folgenden Schmiegungeebene senkrecht steht, die mit dieser den Winkel $d\sigma$ bildet. In diesem Dreieck ist nun

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - d\sigma \right) = \cos H \cdot \sin dk$$

$$\sin H = \operatorname{tg} d\tau \cdot \operatorname{Cotg} dk$$

mithin, wenn man abkürzt

$$\cos H = \frac{d\sigma}{dk}$$

$$\sin H = \frac{d\tau}{dk}$$

und folglich noch

$$\operatorname{tg} H = \frac{d\tau}{d\sigma}$$

oder in Form einer Proportion

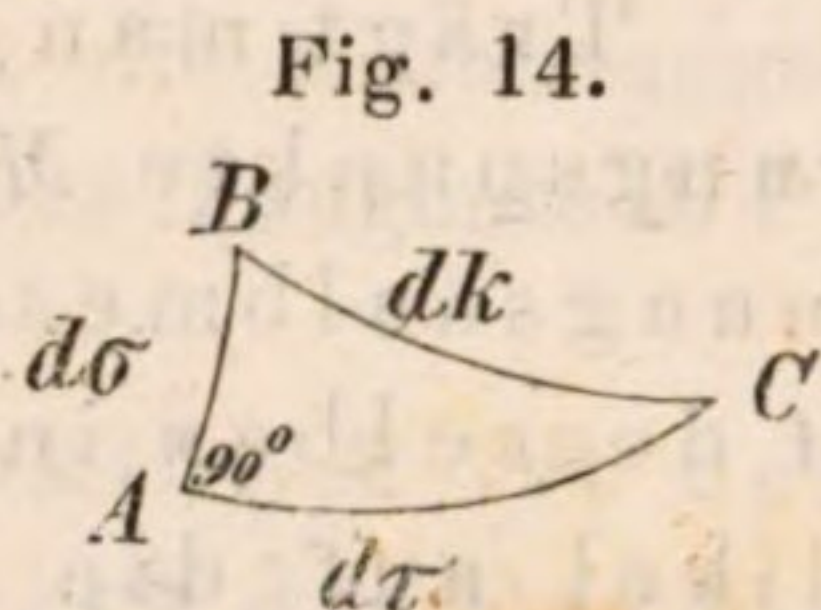
$$\sin H : \cos H : 1 = d\tau : d\sigma : dk$$

$$\frac{\sin H}{d\tau} = \frac{\cos H}{d\sigma} = \frac{1}{dk}$$

d. h.

Der Neigungswinkel H der rectificirenden Geraden gegen die Tangente ist der Winkel, welcher in dem aus $d\tau$, $d\sigma$, dk als Seiten gebildeten unendlich-kleinen rechtwinkligen Dreiecke der Seite $d\tau$ gegenüberliegt.

Dies Resultat kann auch unmittelbar erhalten werden. In dem unendlichkleinen Dreieck ABC (Fig. 14), aus welchem wir den Lancret'schen Satz ableiteten (Cap. II, §. 10.), waren die Linien, welche vom Mittelpunkt der Kugel nach den Punkten C, B, A laufen parallel den Krümmungshalbmessern in M' und M und der Projection des letzteren auf die Schmiegungeebene von M ; daher fallen die Seiten CB, BA, AC in Ebenen, welche parallel laufen der Ebene der ganzen Krümmung, der Normalebene und der Schmiegungeebene, und daher sind die Winkel B, A, C gleich den Winkeln, welche die auf diesen Ebenen senkrechten Geraden: die rectificirende Gerade, die Tangente und Binormale in derselben Ordnung mit einander bilden, nämlich $B = H$ d. h. gleich dem Winkel zwischen der rectificirenden Geraden und Tangente, $A = 90^\circ$, nämlich gleich dem Winkel zwischen der Tangente und Binormalen und $C = 90^\circ - H$, nämlich gleich dem Winkel zwischen Binormale und rectificirender Geraden, welcher das Complement zu H ist, da die rectificirende Gerade, die Tangente und Binormale alle drei in der rectificirenden Ebene liegen und die beiden letzten von ihnen zu einander senkrecht sind. Aus diesem Dreieck ABC erhält man daher sofort die obigen Relationen.



§. 6. Die Ausdrücke für $\sin H$, $\cos H$, $\tan H$ kann man auch durch die drei Radien ϱ, r, R darstellen, nämlich:

$$\sin H = \frac{d\tau}{dk} = \frac{R}{\varrho}$$

$$\cos H = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{R}{r}$$

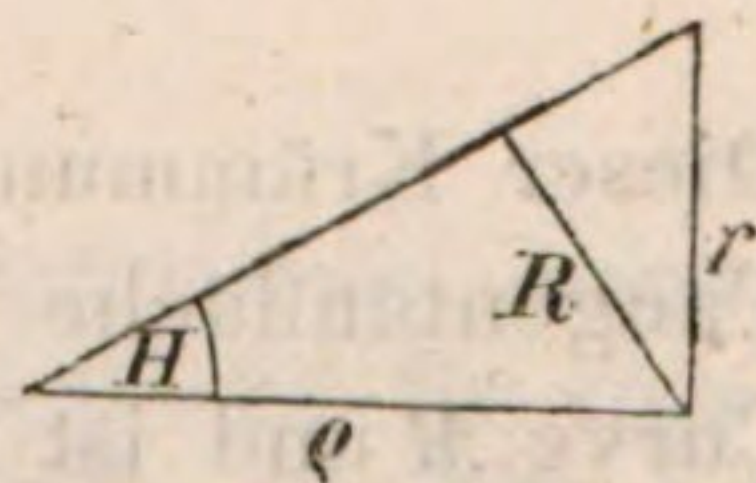
$$\tan H = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}$$

$$\sin H : \cos H : 1 = \frac{1}{\varrho} : \frac{1}{r} : \frac{1}{R}$$

$$\varrho \sin H = r \cos H = R.$$

Hieraus ersieht man, dass r und ϱ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 15) sind, in welchem der Seite r der Winkel H gegenüberliegt; das vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel ist alsdann gleich R . Dies Dreieck erhält man in der rectificirenden Ebene selbst, indem man in der Tangente vom Berührungspunkte M aus eine Strecke $MA = \varrho$ aufträgt, und in A ein Perpendikel auf

Fig. 15.



die Tangente errichtet und dieses bis zum Durchschnitt B mit der rectificirenden Geraden verlängert. Daher:

Trägt man in der Tangente der Curve vom Berührungspunkte M aus eine Länge MA gleich dem Krümmungshalbmesser ϱ auf, errichtet in dem Endpunkte A desselben in der rectificirenden Ebene ein Perpendikel auf die Tangente, welches die rectificirende Gerade in B schneidet und fällt von demselben Punkte A ein Perpendikel AC auf die rectificirende Gerade, so stellen diese beiden Perpendikel AB und AC den Schmiegungradius r und den Radius der ganzen Krümmung R dar.

In diesem Satze findet man noch eine Bestätigung des Cap. II. §. 12 gefundenen, dass der Radius der ganzen Krümmung weder grösser als der Krümmungsradius, noch grösser als der Schmiegungradius sein kann.

§. 7. Wir haben bereits Cap. III. §. 9 bemerkt, dass die Evolventen die Linien stärkster Krümmung auf der Tangentenfläche sind, dass sich mithin die Normalen der Fläche längs einer Evolvente schneiden und eine abwickelbare Fläche bilden. Ein solcher Durchschnitt zweier Normalen ist der Krümmungsmittelpunkt des durch die Tangente der Evolvente geführten Normalschnitts der Fläche und die Gratlinie jener abwickelbaren Fläche der Normalen also der Ort dieser Krümmungsmittelpunkte für eine Evolvente und also die Fläche, auf welcher alle solche Gratlinien liegen, der Ort der Mittelpunkte der stärksten Krümmung für die ganze Tangentenfläche. Ist nun PP' das Element einer Evolvente, welche dem Abstände $MP = p$ von der Curve M entspricht, so ist der Contingenzwinkel des durch dies Element geführten Normalschnitts der Tangentenfläche der Neigungswinkel zweier Tangentenebenen der Fläche, d. h. der Schmiegunswinkel $d\sigma$ der Curve M , mithin der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts

$$\varrho_0 = \frac{PP'}{d\sigma}$$

oder da $PP' = p \cdot d\tau$ ist

$$\varrho_0 = p \cdot \frac{d\tau}{d\sigma} = p \cdot \frac{r}{\varrho} = p \cdot \operatorname{tg} H.$$

Dieser Krümmungshalbmesser hat die Richtung der Normalen der Tangentenfläche in P , fällt also in die rectificirende Ebene der Curve M und ist also die Länge des Perpendikels, welches in P in der rectificirenden Ebene errichtet werden kann von P bis zum Durch-

schnitt mit der rectificirenden Geraden. Daher liegt der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts der Tangentenfläche auf der rectificirenden Geraden und ist diese der Ort für die Krümmungsmittelpunkte aller solcher Normalschnitte längs der Tangente MP ; d. h.:

Die rectificirende Gerade des Punktes M ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller durch die Punkte der Tangente von M geführten Normalschnitte stärkster Krümmung der Tangentenfläche und

Die rectificirende Fläche ist der Ort der Mittelpunkte stärkster Krümmung der Tangentenfläche.

§. 8. Construirt man in allen Punkten P der Tangente der Curve M die Krümmungskreise der Normalschnitte der Tangentenfläche, so sind ihre Ebenen parallel und senkrecht zur Tangente MP und liegen ihre Mittelpunkte auf der rectificirenden Geraden des Punktes M . Sie selbst liegen daher alle auf der Fläche eines schiefen Kegels, für welchen sie die eine Schaar Kreisschnitte bilden. Dieser Kegel hat mit der Tangentenfläche zwei Erzeugungslinien und die Tangentenebenen in ihnen gemein. Diese Erzeugungslinien sind Tangenten der Curve M und verbinden drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve. Daher hat der Kegel auch mit der Curve diese Punkte gemein, oder berührt dieselbe in seinem Mittelpunkte in der zweiten Ordnung.

Construirt man einen geraden Kegel, dessen Axe die rectificirende Gerade ist und der durch die Tangente der Curve geht, so geht er auch zugleich durch die folgende Tangente, weil die rectificirende Gerade mit beiden Tangenten gleiche Winkel bildet. Auf ihm liegen also auch drei Punkte der Curve, er berührt mithin die Curve ebenfalls in seinem Mittelpunkt in der zweiten Ordnung *).

§. 9. Wir haben Cap. III. §. 8 gezeigt, dass die rectificirende Fläche der Ort der Krümmungsaxen aller Filarevolventen der Curve M ist. Mit Rücksicht auf Cap. IV. §. 2 folgt hieraus:

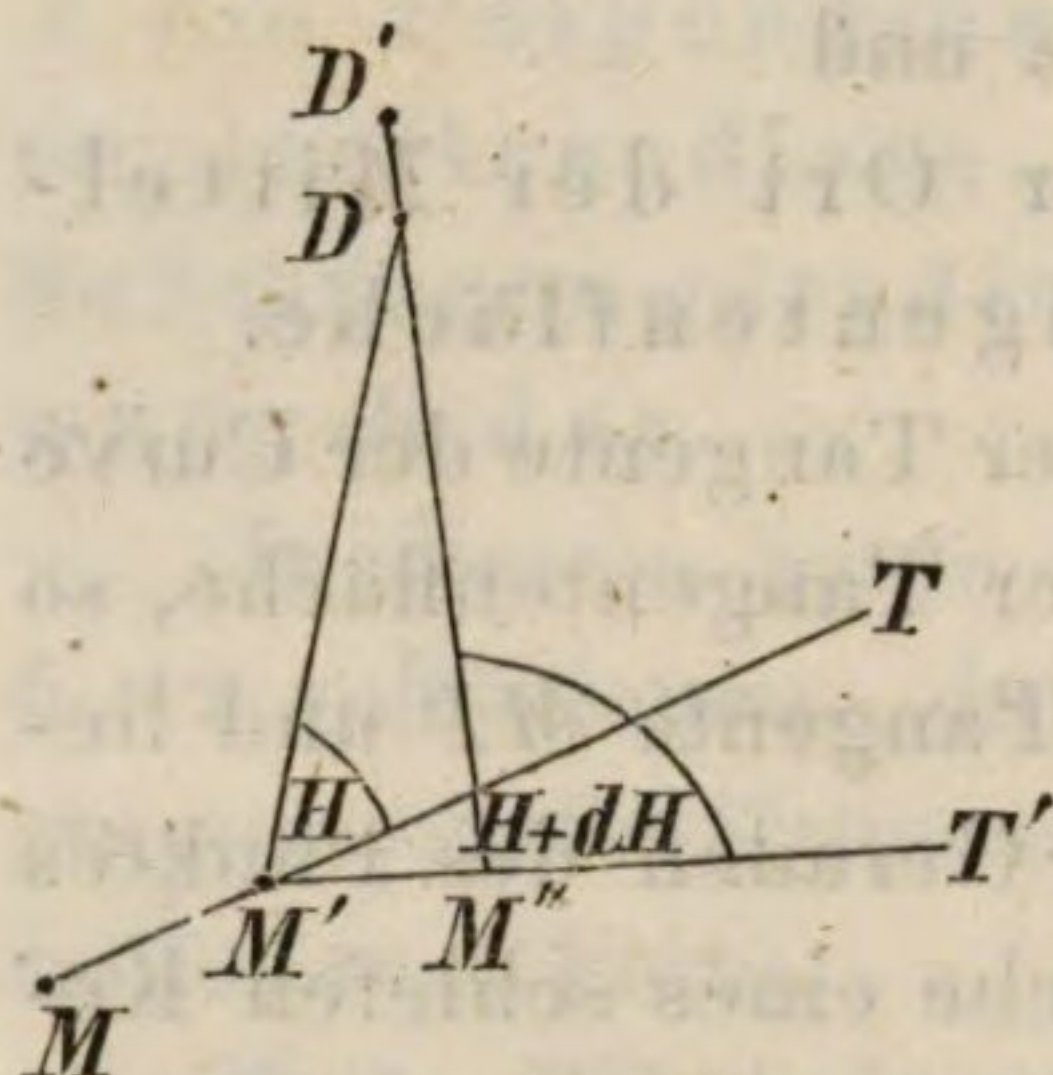
Die rectificirende Fläche einer Curve ist die Fläche ihrer Evoluten aller ihrer Evolventen und:

*) Cf. Saint-Venant, Mém. sur les lignes courbes non planes. Journ. de l'école Polyt. T. XVIII. p. 42 und Voizot, Note sur la théorie des courbes à double courbure. Journ. des Mathém. p. Liouville. T. XV und T. XVII.

Die Gratlinie der rectificirenden Fläche ist der Ort der Mittelpunkte der Schmiegunskugeln aller Filarevolventen der Curve *).

§. 10. Um den Winkel zweier aufeinanderfolgender rectificirender Geraden, d. h. den Contingenzwinkel $d\tau$ der Gratlinie der rectificirenden Fläche, die wir kurz die rectificirende Kante nennen wollen zu finden, seien $M'D$, $M''D'$ (Fig. 16) die beiden rectificirenden Geraden der Punkte M , M' , welche

Fig. 16.



sich in D schneiden. Sie bilden mit den Tangenten der Punkte M , M' die Winkel $DM'T = H$ und $DM''T' = H + dH$. Dreht man nun die rectificirende Ebene $DM''T'$ um die rectificirende Gerade DM' um, bis sie in die rectificirende Ebene $DM'T$ fällt, so fällt die Tangente $M'T'$ in die Tangente MT , weil bei der Abwicklung der rectificirenden Fläche alle Tangenten der Curve zusammenfallen. Hieraus

folgt, dass Winkel $DM'T' = DM'T = H$ ist. Aus dem Dreieck $DM'M''$ ergibt sich daher weiter Winkel $M'DM'' = DM''T' - DM'T'$ oder

$$d\tau = dH$$

d. h.

Der Contingenzwinkel der rectificirenden Kante ist gleich dem Differentiale des Winkels, welchen die rectificirende Gerade mit der Tangente bildet.

Hiezu kommt noch zufolge §. 1:

Der Schmiegunswinkel der rectificirenden Kante ist gleich dem Winkel der ganzen Krümmung der Curve. Der Winkel der ganzen Krümmung der rectificirenden Kante ist also: $dk = \sqrt{dk^2 + dH^2}$.

§. 11. Die Entfernung L des Punktes D der rectificirenden Kante von dem entsprechenden Punkte der Curve M zu finden, nämlich $L = DM = DM'$, hat man in dem Dreieck $DM'M$ (Fig. 16 od. 17)

$$DM': DM'' = \sin(H + dH) : \sin dH$$

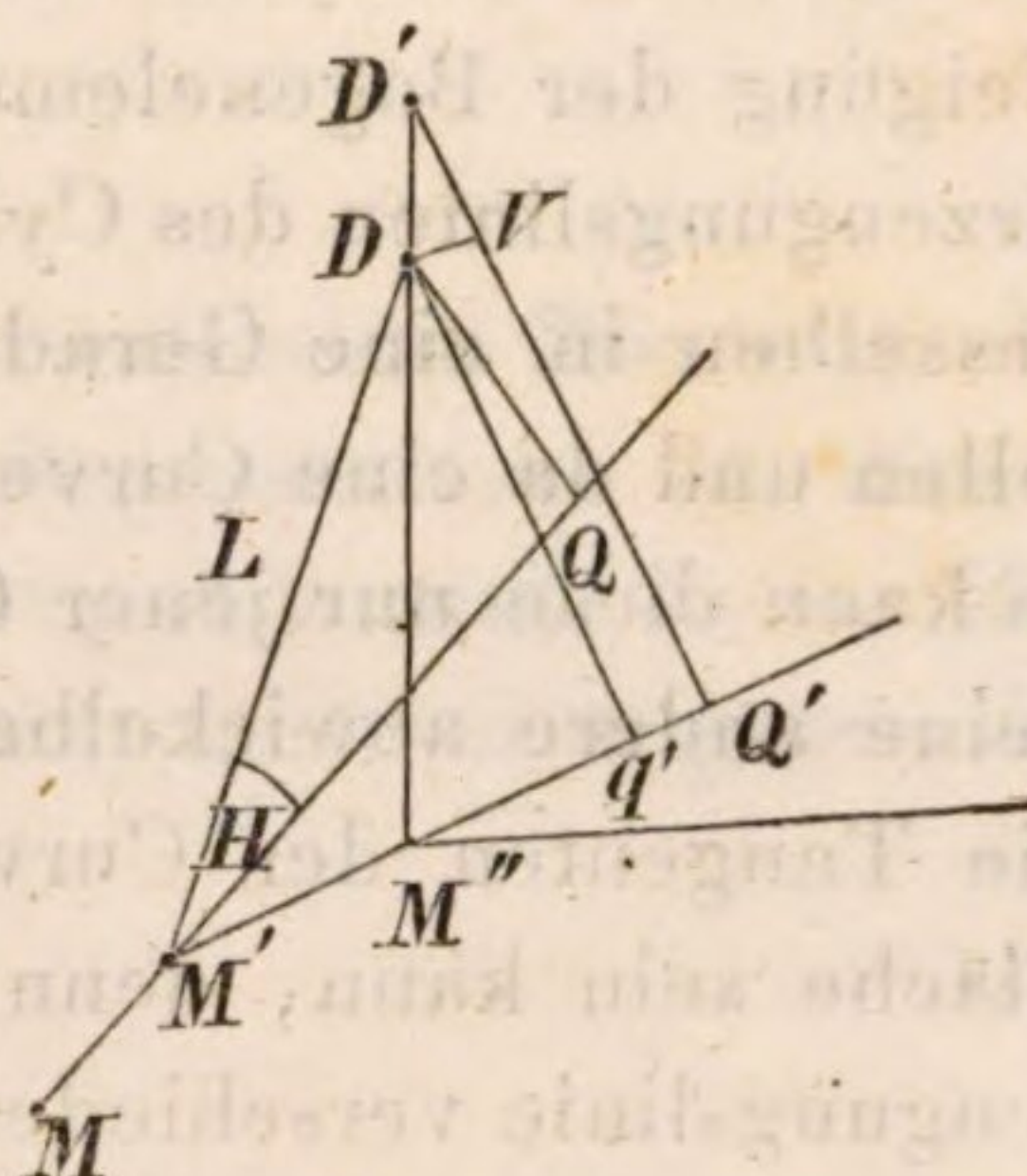
und hieraus folgt, wenn man reducirt

$$L = \sin H \frac{ds}{dH} = \frac{d\tau}{dk} \cdot \frac{ds}{dH} = \frac{R}{\rho} \cdot \frac{ds}{dH} \quad (\S. 6).$$

*) Cf. Voizot, Journal des Mathém. T. XVII.

Mit Hülfe dieser Länge findet man das Bogenelement $DD' = ds$ (Fig. 17) der rectificirenden Kante folgendermassen. Vom Punkte D fallen wir auf die Tangente in M das Perpendikel $DQ = p = L \cdot \sin H$; ebenso von D' auf die Tangente in M' das Perpendikel $D'Q' = p + dp$; ein drittes Perpendikel Dq' von D auf die Tangente in M' wird gleich $DQ = p$ wegen der Congruenz der Dreiecke $DM'Q$ und $DM'q'$, welche beide bei M den Winkel H enthalten. Zieht man nun noch DV parallel mit $q'Q'$ so erhält man im rechtwinkligen Dreieck DVD'

Fig. 17.



$$DD' \cdot \sin (H + dH) = DV$$

und folglich, wegen

$$DV = D'Q' - Dq' = D'Q' - DQ = dp$$

$$ds = \frac{dp}{\sin H} = \frac{d \cdot L \sin H}{\sin H} = dL + L \operatorname{tg} H \cdot dH.$$

§. 12. Mit Hülfe der in den §§. 10, 11 entwickelten Ausdrücke für ds , $d\tau$, $d\sigma$, dk erhält man für die Radien der Krümmung, Schmiegun und ganzen Krümmung der rectificirenden Kante:

$$\dot{\varrho} = \frac{1}{\sin H} \cdot \frac{dp}{dH}, \quad \dot{r} = \frac{1}{\sin H} \cdot \frac{dp}{dk}, \quad \dot{R} = \frac{1}{\sin H} \cdot \frac{dp}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}.$$

§. 13. Die Beschaffenheit der rectificirenden Fläche ist von grossem Einfluss auf die Beschaffenheit der Curve und umgekehrt. In dieser Hinsicht lassen sich eine Reihe interessanter Sätze aufstellen, von denen wir die folgenden besonders herausheben:

I. Ist der Winkel H constant, so ist die rectificirende Fläche ein Cylinder und die Curve eine Helix (eine Curve, welche gegen die Erzeugungslinien constante Neigung hat) auf ihm. Es ist nämlich in diesem Falle der Contingenzwinkel dH der rectificirenden Kante gleich Null, also jede rectificirende Gerade mit der folgenden, also auch alle unter einander parallel; weil H constant ist, sind die Tangenten oder Bogenelemente der Curve gegen die Erzeugungslinien alle unter demselben Winkel geneigt. Ist $H = 90^\circ$ so ist die Curve eben.

II. Ist die rectificirende Fläche ein Cylinder, so ist die Curve eine Helix desselben. Denn da die rectificirenden Geraden parallel sind, so ist $dH = 0$, also H constant.

III. Lässt sich durch die Curve eine Cylinderfläche legen, gegen deren Erzeugungslinien sie unter constantem Winkel geneigt ist, so ist diese die rectificirende Fläche der Curve. Denn wegen der constanten Neigung der Bogenelemente und Tangenten der Curve gegen die Erzeugungslinien des Cylinders geht die Curve bei der Abwicklung desselben in eine Gerade über, indem alle Tangenten zusammenfallen und da eine Curve nur eine rectificirende Fläche haben kann, so kann diese nur jener Cylinder sein. Es ist leicht zu sehen, dass keine andere abwickelbare Fläche, gegen deren Erzeugungslinien die Tangenten der Curve constante Neigung haben, rectificirende Fläche sein kann, denn zwei Tangenten bilden mit derselben Erzeugungslinie verschiedene Winkel, deren Differenz gleich dem Contingenzwinkel der Gratlinie dieser Fläche ist.

IV. Ist die rectificirende Fläche ein Cylinder, also die Curve eine Helix, so laufen alle Krümmungshalbmesser einer Ebene parallel. Die rectificirende Gerade steht nämlich senkrecht auf der Ebene der ganzen Krümmung, nämlich der Ebene, welche zweien aufeinanderfolgenden Krümmungshalbmessern parallel ist. Sind nun die rectificirenden Geraden parallel, so sind auch alle diese Ebenen parallel und also alle Krümmungshalbmesser parallel zu einer von ihnen.

V. Laufen alle Krümmungshalbmesser einer Curve einer Ebene parallel, so ist die rectificirende Fläche ein Cylinder und die Curve eine Helix. Diese Curven sind daher die einzigen, denen die Eigenschaft IV zukommt.

VI. Ist die rectificirende Fläche ein Cylinder oder die Curve eine Helix, so ist das Verhältniss ihrer ersten und zweiten Krümmung oder das Verhältniss der diesen entsprechenden Radien constant. Denn es ist

$$\frac{d\tau}{ds} : \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\rho} = \operatorname{tg} H$$

also constant, weil H constant ist.

VII. Ist das Verhältniss der ersten und zweiten Krümmung einer Curve constant, so ist diese eine Helix*). Diese Curvengattung ist die einzige, denen diese Eigenschaft zukommt.

*) Cf. Liouville, Note sur les courbes à double courbure in den Anmerkungen zu seiner Ausgabe von Monge Applications etc. p. 584, woselbst ein Brief von Serret über diesen und ähnliche Sätze abgedruckt ist.

Ist der Winkel H constant, so sind die Verhältnisse

$$d\tau : d\sigma : dk = \frac{1}{\varrho} : \frac{1}{r} : \frac{1}{R}$$

ebenfalls constant; es sei insbesondere

$$\frac{d\tau}{dk} = \sin H = \varepsilon.$$

Schneiden wir den rectificirenden Cylinder mit einer Ebene senkrecht zu den Erzeugungslinien, so ist das Bogenelement ds_0 dieses orthogonalen Schnittes die Projection des Bogenelements ds der Helix und mithin da diese unter dem constanten Winkel H gegen die Erzeugungslinie geneigt ist

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{1}{\sin H} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Es ist ferner der Contingenzwinkel des orthogonalen Schnittes gleich dem Winkel zweier Tangentenebenen des Cylinders und da dieser die rectificirende Fläche der Helix ist, gleich dk ; daher ist der Krümmungshalbmesser ϱ_0 dieses Schnitts

$$\varrho_0 = \frac{ds_0}{dk}.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit dem Ausdrücke des Krümmungshalbmessers ϱ für die Helix

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}$$

die Proportion

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{ds}{d\tau} : \frac{ds_0}{dk} = \frac{ds}{ds_0} \cdot \frac{dk}{d\tau}$$

und daher weiter mit Rücksicht auf die beiden vorigen Gleichungen

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\varepsilon^2} = \frac{\varrho}{\sin^2 H}$$

d. h.

VII. Ist die Curve eine Helix, so ist ihr Krümmungshalbmesser proportional dem Krümmungshalbmesser des Orthogonalschnitts des rectificirenden Cylinders und wird erhalten, wenn man diesen durch das Quadrat des Sinus der Neigung der Helix gegen die Erzeugungslinien des Cylinders dividirt.

Da $\frac{r}{\varrho} = \operatorname{tg} H$, $\frac{R}{\varrho} = \sin H$ ist, so folgt noch

$$r = \varrho \cdot \operatorname{tg} H = \frac{\varrho_0}{\sin H \cos H}$$

$$R = \varrho \cdot \sin H = \frac{\varrho_0}{\sin H}$$

d. h. auch der Schmiegungradius und der Radius der ganzen Krümmung sind proportional dem Krümmungshalbmesser ϱ_0 des Orthogonalschnittes. Ist ϱ_0 constant, so sind also die Radien der drei Krümmungen der Helix constant.

VIII. Sind der Krümmungshalbmesser und der Schmiegunghalbmeser einer Curve beide constant, so ist die Curve eine Helix eines Kreiscylinders*). Denn es ist dann sowohl $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$, als auch $r = \frac{ds}{d\sigma}$ constant, mithin auch $\frac{r}{\varrho} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \sin H$. Ferner ist auch $\varrho_0 = \varrho \cdot \sin^2 H$ constant, mithin der Orthogonalschnitt ein Kreis.

Die Curven constanten Krümmungshalbmessers werden im folgenden Kapitel nähere Berücksichtigung finden.

IX. Lässt sich durch eine Curve eine abwickelbare Fläche legen, auf welcher sie kürzeste Linie ist, so ist diese Fläche die rectificirende Fläche derselben. Denn es stehen dann alle Hauptnormalen auf den Tangentenebenen der Fläche senkrecht.

X. Lässt sich durch eine Curve eine abwickelbare Fläche legen, mit deren Erzeugungslinien sie Winkel bildet, die fortwährend um den Contingenzwinkel ihrer Gratlinie wachsen oder abnehmen, so ist die Fläche die rectificirende Fläche. Denn bei der Abwicklung der Fläche fallen die Tangenten der Curve zusammen.

Cap. VII.

Die Fläche der Hauptnormalen oder Krümmungshalbmesser.

§. 1. Die Fläche der Hauptnormalen oder Krümmungshalbmesser einer Curve M doppelter Krümmung ist nach Cap. I, §. 9 windschief. Die Curve selbst ist der Durchschnitt dieser Fläche mit der rectificirenden Fläche sowohl als auch mit der Fläche der Binorma-

*) Cf. Liouville, Note sur les courbes à double courbure, a. a. O. p. 564; Bertrand, sur la courbe dont les deux courbures sont constantes. Journ. des Mathém. T. XIII, p. 423.

len. Sie schneidet die geraden Erzeugungslinien der Fläche rechtwinklig und ihre Schmiegungebenen sind die Tangentenebenen der Fläche in den Durchschnittspunkten mit diesen; denn sie gehen durch die Tangenten zweier durch einen solchen Punkt auf der Fläche gezogenen Geraden, nämlich durch die Tangente der Curve und die gerade Erzeugungslinie, welche ihre eigene Tangente ist. Die Binormalen sind Normalen der Fläche in den Punkten der Curve, da sie zu diesen Tangentenebenen senkrecht sind.

§. 2. Auf der Fläche der Hauptnormalen liegt die Curve der Krümmungsmittelpunkte C . Sie ist der Durchschnitt derselben mit der Fläche der Krümmungsaxen. Das Bogenelement CC' und also die Tangente im Punkte C dieser Curve fällt in die Normalebene der primitiven Curve M , daher kreuzen sich die Tangenten beider Curven rechtwinklig. Die Normalebene der Curve C steht senkrecht auf der Normalebene von M , ist also parallel der Tangente von M . Nun ist nach Cap. V. §. 3 die Tangente von C zugleich Tangente an einen über dem Radius MK der Schmiegunskugel als Durchmesser construirten Kreis, daher geht die Normalebene von C durch die Mitte des Radius der Schmiegunskugel von M . Das Bogenelement $CC' = ds$ der Curve C ist leicht mit Hülfe der dortigen Betrachtungen zu finden. Es ist nämlich das Element jenes Kreises und über ihm steht als Peripheriewinkel der Schmiegunswinkel $d\sigma$, daher ist dasselbe gleich dem Produkte des Radius der Schmiegunskugel und des Schmiegunswinkels, d. h. es ist

$$ds = R^* \cdot d\sigma = \frac{R^*}{r} \cdot ds.$$

Die Tangente der Curve C bildet mit der Krümmungsaxe denselben Winkel μ , unter welchem der Radius der Schmiegunskugel gegen die Schmiegunsebene und den Krümmungshalbmesser geneigt ist.

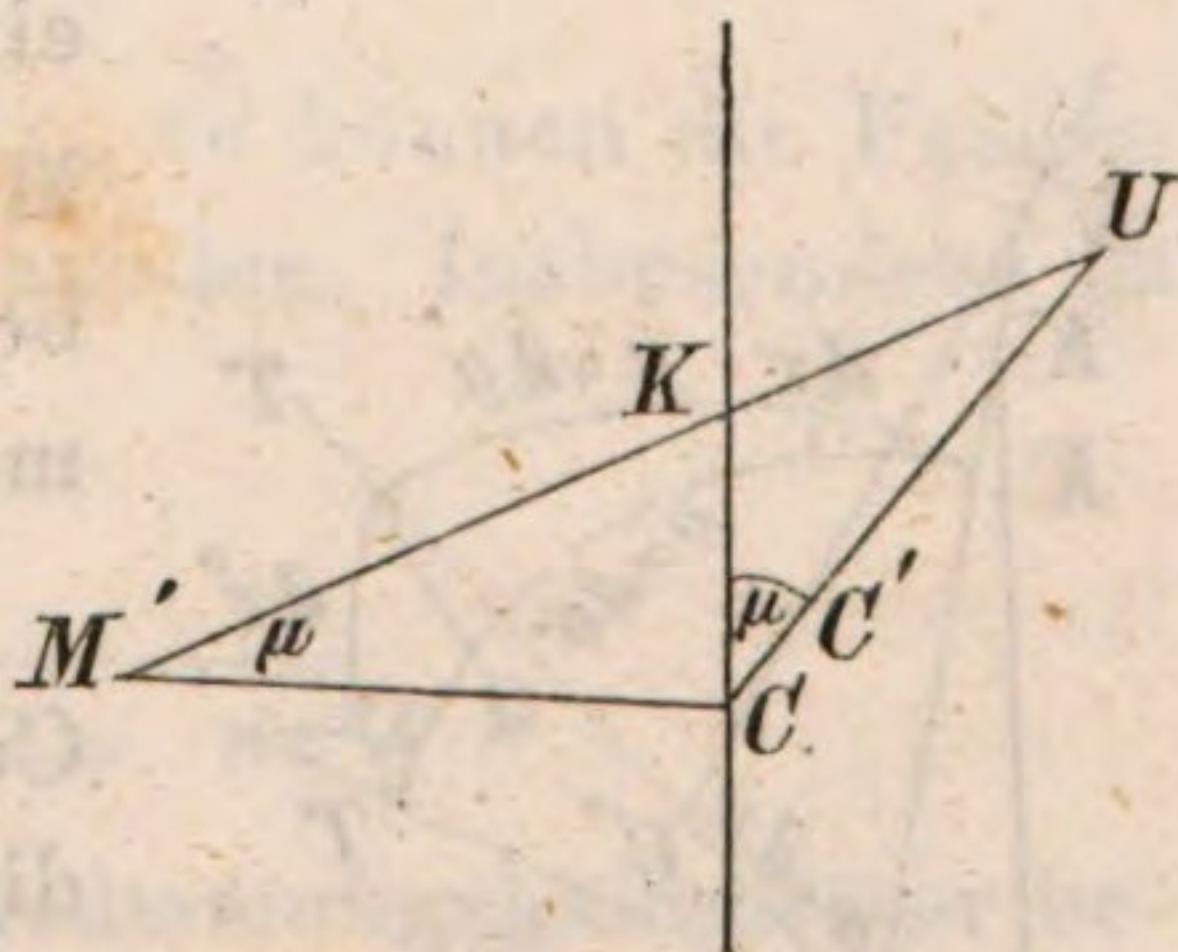
(Cap. V. §. 2.) Ist $\mu = \frac{\pi}{4}$ so läuft sie mit

Fig. 18.

dem Radius der Schmiegunskugel parallel, ist $\mu \gtrless \frac{\pi}{4}$, so schneiden sich beide in einem Punkte U (Fig. 18) auf der einen oder andern Seite der Hauptnormalen und bilden mit dieser ein Dreieck $M'CU$, in welchem im einen Falle zwei Winkel gleich

μ und $\frac{\pi}{2} + \mu$, im andern Falle gleich

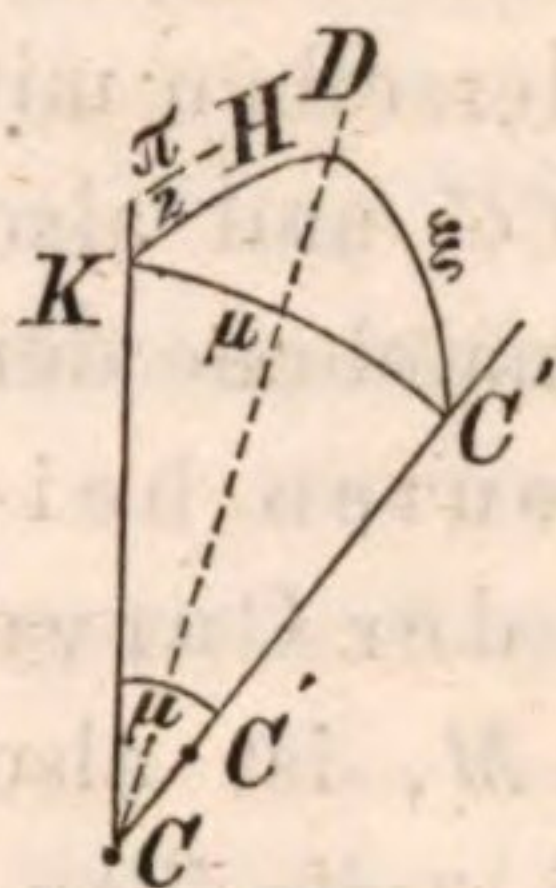
$\pi - \mu$ und $\frac{\pi}{2} - \mu$ sind, daher ist je der Winkel $M'UC = \pm (\frac{\pi}{2} - 2\mu)$.



Mit dem Krümmungshalbmesser und der Schmiegun-
gungsebene bildet die Tangente an C den Winkel $\frac{\pi}{2} - \mu$,
da sie mit ihm und der Krümmungsaxe, mit der sie den Winkel μ
bildet in derselben Ebene, der Normalebene liegt.

§. 8. Um den Neigungswinkel ξ der Tangente der Curve C ge-
gen die rectificirende Gerade zu finden, ziehen wir durch C eine

Fig. 19.



Parallele CD zu dieser (Fig. 19). Die Tangente von C , die Krüm-
mungsaxe und diese Linie CD bilden eine dreiflächige
Ecke und in dem dieser entsprechenden sphärischen
Dreiecke $C'KD$ ist die Seite $KD = \frac{\pi}{2} - H$, weil CD
parallel der rectificirenden Geraden und die Krüm-
mungsaxe CK parallel der Binormalen ist, $KC' = \mu$,
 $C'D = \xi$ und der dieser Seite gegenüberliegende Win-
kel $C'KD = 90^\circ$, weil die Ebene $C'CK$ die Normal-
ebene und die Ebene KCD der rectificirenden Ebene
parallel ist. Aus diesem Dreieck folgt

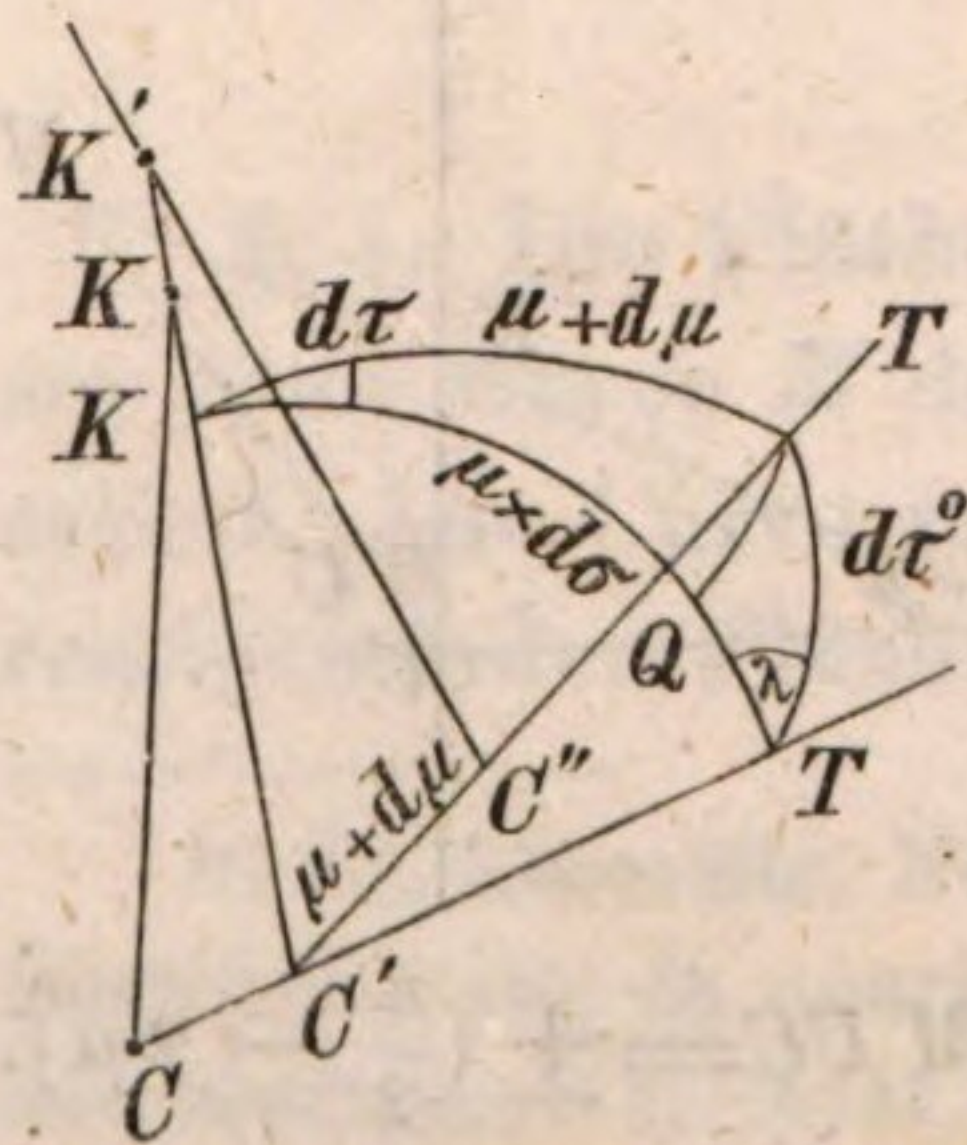
$$\cos \xi = \cos \mu \cdot \sin H = \frac{\varrho}{R} \cdot \frac{R}{\varrho} = \frac{R}{R}$$

d. h.:

Der Cosinus der Neigung der Tangente an die
Curve der Krümmungsmittelpunkte gegen die rectifi-
cirende Gerade wird durch das Verhältniss des Radius
der ganzen Krümmung zum Radius der Schmiegun-
gskugel angegeben.

Für den speciellen Fall $\mu = 0$, in welchem die Curve K der
Schmiegunskugelmittelpunkte mit der Curve der Krümmungsmittel-
punkte zusammenfällt wird der Krümmungshalbmesser ϱ constant,
(Cap. V. §. 2. $h = \frac{d\varrho}{d\sigma}$), der Halbmesser der Schmiegunskugel ihm
gleich und die Krümmungsaxe Tangente an C . In diesem Falle wer-

Fig. 20.



den die Winkel ξ und H complementär, der
eine also $\frac{\pi}{4} - \alpha$, wenn der andere $\frac{\pi}{4} + \alpha$ ist.
Man sieht dies auch unmittelbar, wenn man
bedenkt, dass die Krümmungsaxe der Binor-
malen parallel ist.

§. 4. Um den Contingenzwinkel $d\tau$ der
Curve C zu finden, seien (Fig. 20) CT , $C'T'$
die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten
der Curve C , die ihn bilden, CK , $C'K'$ die
Krümmungsaxen, welche durch deren Berüh-

rungspunkte C, C' gehen und um C' mit der Linieneinheit eine Kugel beschrieben, auf welcher die Geraden $C'T, C'T', C'K'$ das sphärische Dreieck $TT'K$ bestimmen. In diesem ist $TT' = d\tau^0$, $TK = \mu + d\sigma$, $T'K = \mu + d\mu$, $\sphericalangle TKT' = d\tau$, nämlich gleich dem Winkel zweier Normalebenen $TCK, T'C'K'$ der Curve M . Fällt man von T' auf die Gegenseite TK das Perpendikel $T'Q$, so wird $TQ = \pm (d\sigma - d\mu)$ und $T'Q = \sin \mu \cdot d\tau$ und folglich

$$d\tau^2 = (d\sigma - d\mu)^2 + \sin^2 \mu \cdot d\tau^2.$$

Für die Curven von constantem Krümmungshalbmesser ist $\mu = 0$, mithin $d\tau^0 = d\sigma$, wie auch einleuchtet, wenn man bedenkt, dass der Contingenzwinkel der Curve K , welche in diesem Falle mit der Curve C zusammenfällt, gleich dem Schmiegunswinkel der Curve M ist.

Aus dem Dreieck TQT' erhält man noch den Neigungswinkel $T'TQ = \lambda$ der Schmiegunsebene der Curve C gegen die Normalebene der Curve M , nämlich

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{QT'}{QT} = \pm \frac{\sin \mu \cdot d\tau}{d\sigma - d\mu}.$$

§. 5. Der Schmiegunswinkel $d\sigma^0$ der Curve C ergibt sich aus dem Winkel λ mit Hülfe derselben Betrachtungen, wie in Cap. III.

§. 7. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} d\sigma^0 &= d\lambda + \left(\frac{\pi}{2} - KT'Q\right) \text{ und da } \sin\left(\frac{\pi}{2} - KT'Q\right) = \cos KT'Q \\ &= \operatorname{Cotg}(\mu + d\mu) \cdot \operatorname{tg} T'Q = \operatorname{Cotg} \mu \cdot T'Q = \operatorname{Cotg} \mu \cdot \sin \mu \cdot d\tau = \\ &\cos \mu \cdot d\tau \text{ ist, so wird } d\sigma^0 - d\lambda = \sin(d\sigma^0 - d\lambda) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - KT'Q\right) \\ &= \cos \mu \cdot d\tau, \text{ mithin} \end{aligned}$$

$$d\sigma^0 = \pm \frac{d\left(\frac{\sin \mu \cdot d\tau}{d\sigma - d\mu}\right)}{1 + \left(\frac{\sin \mu \cdot d\tau}{d\sigma - d\mu}\right)^2} + \cos \mu \cdot d\tau.$$

§. 6. Mit Hülfe der Werthe für $ds^0, d\tau^0, d\sigma^0$ können die Fragen über die Krümmung der Curve C erledigt werden. Insbesondere ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho^0 = \frac{ds^0}{d\tau^0} = \frac{\overset{*}{R} \cdot d\sigma}{\sqrt{(d\sigma - d\mu)^2 + \sin^2 \mu \cdot d\tau^2}}$$

In dem Falle, dass die Curve constanten Krümmungshalbmesser besitzt, also für $\mu = 0$ wird $\varrho_0 = \overset{*}{R} = \varrho$. In diesem Falle haben die Curve M und die Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte gleiche Krüm-

mungshalbmesser und besitzen überhaupt sehr interessante Beziehungen, von denen wir einige anführen wollen. Da die Curve K mit der Curve C zusammenfällt, so fällt die Schmiegungebene von C mit der Normalebene von M und da die Krümmungsaxe Tangente an C ist, so fällt auch die Normalebene von C mit der Schmiegungebene von M zusammen. d. h. Die Schmiegungebene jeder von ihnen ist die Normalebene und ihre Normalebene die Schmiegungebene der andern. Da sich nun Normalebene und Schmiegungebene einer Curve in der Hauptnormalen schneiden, so haben beide Curven gemeinschaftliche Hauptnormalen, also auch die Fläche der Hauptnormalen gemein. Da die Normalebenen der einen die Schmiegungebenen der andern sind und sich die Normalebenen in den Krümmungsaxen und die Schmiegungebenen in den Tangenten schneiden, so ist die Tangente jeder die Krümmungsaxe der andern und umgekehrt. Daher ist die Tangentenfläche der einen die Fläche der Krümmungsaxen und mithin die Evolutenfläche der andern. Die Fläche der Evolventen der einen ist die Fläche der Evoluten der andern. Nun ist die Curve der Krümmungsmittelpunkte der Durchschnitt der Fläche der Krümmungsaxen mit der Fläche der Hauptnormalen, und da letztere Fläche bei den Curven gemein ist, so ist jede von den beiden Curven die Curve der Krümmungsmittelpunkte der andern. Aus ähnlichen Gründen ist auch jede die Curve der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln der andern. Jede ist eine Planevolute der andern. Da die rectificirenden Ebenen einer Curve auf den Hauptnormalen senkrecht stehen und diese beiden Curven gemein sind, so folgt dass die rectificirenden Ebenen beider Curven parallel und dass also auch ihre Durchschnittslinien, die rectificirenden Geraden parallel sind. Daher ist die rectificirende Fläche der einen eine Cylinderfläche, wenn es die andere ist, also auch die eine Curve eine Helix, wenn es die andere ist. Da die Curven gemeinschaftliche Hauptnormalen haben, so ist auch der Winkel der ganzen Krümmung für beide derselbe, die Contingenz- und Schmiegunswinkel aber haben sie reciprok gemein; da sie gleiche Krümmungshalbmesser haben so ist

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^0}{d\tau^0} = \frac{ds^0}{d\sigma^0} \text{ oder also } ds : ds^0 = d\tau : d\sigma = \operatorname{tg} H = r : \varrho.$$

Nun ist aber der Winkel H , welchen die rectificirende Gerade der Curve C mit der Tangente bildet

$$\overset{0}{H} = \frac{\pi}{2} - H \text{ und also } d\overset{0}{s} : ds = \operatorname{tg} \overset{0}{H} = \overset{0}{r} : \overset{0}{\varrho},$$

$$\text{mithin ist } r : \varrho = \overset{0}{\varrho} : \overset{0}{r} \text{ oder } r\overset{0}{r} = \varrho\overset{0}{\varrho} = \varrho^2 \text{ oder also } \overset{0}{r} = \frac{\varrho^2}{r}$$

$$\text{und ebenso } r = \frac{\overset{0}{\varrho}^2}{r^0}$$

d. h.

Der Schmiegunghalbmesser der einen Curve ist die dritte Proportionale zum gemeinschaftlichen Krümmungshalbmesser und dem Schmiegunghalbmesser der andern. Die Schmiegunghalbmesser beider liefern ein constantes Produkt. Es ist ferner

$$R : \overset{0}{R} = \frac{ds}{dk} : \frac{d\overset{0}{s}}{d\overset{0}{k}} = ds : d\overset{0}{s} = r : \varrho \text{ also } R\varrho = \overset{0}{R}r \text{ oder weil}$$

$$r = \frac{\varrho^2}{r_0} \text{ ist: } Rr_0 = \overset{0}{R}\varrho.$$

Weiter sind die Abstände der rectificirenden Kanten

$$L = \frac{ds}{dH} \cdot \sin H, \quad \overset{0}{L} = \frac{d\overset{0}{s}}{d\overset{0}{H}} \cdot \sin \overset{0}{H}, \text{ mithin } L : \overset{0}{L} = \frac{\frac{ds}{dH} \cdot \operatorname{tg} H}{\frac{d\overset{0}{s}}{d\overset{0}{H}}} =$$

$$= \frac{r}{\varrho} \operatorname{tg} H = -\operatorname{tg}^2 H = -\frac{r^2}{\varrho^2} \text{ und } p : p_0 = L \sin H : \overset{0}{L} \sin \overset{0}{H} = \frac{L}{\overset{0}{L}} \cdot \operatorname{tg} H$$

$$= -\operatorname{tg}^3 H = -\frac{r^3}{\varrho^3}.$$

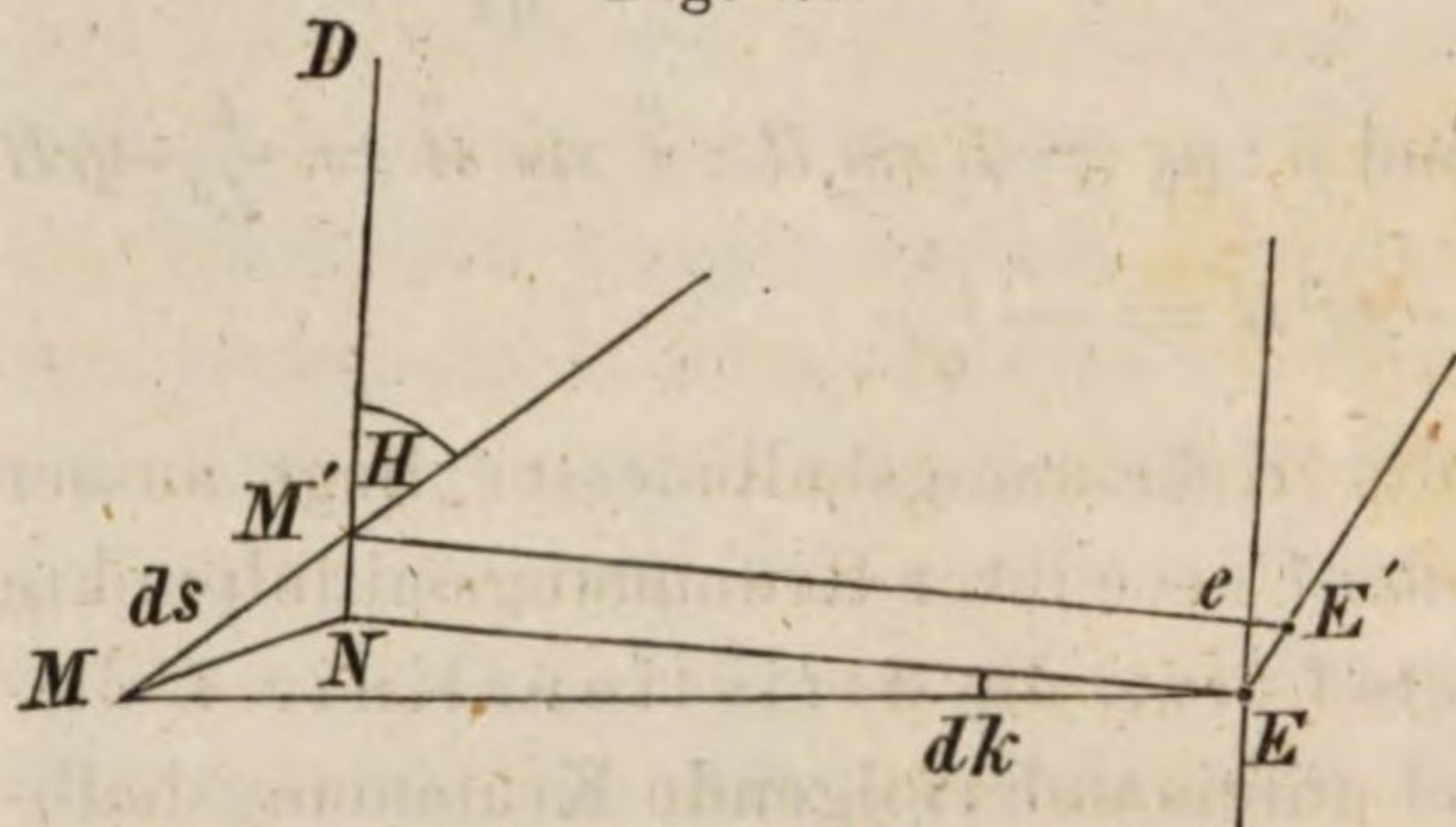
§. 7. Auf der Fläche der Krümmungshalbmesser liegt ausser der primitiven Curve M und der Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte noch eine dritte ausgezeichnete Curve, die Strictionslinie E dieser Fläche. Da nämlich zwei aufeinanderfolgende Krümmungshalbmesser sich nicht schneiden, so gibt es auf ihnen zwei Punkte E, e kürzesten Abstandes; ebenso liegen auf dem zweiten von ihnen und einem folgenden dritten zwei analoge Punkte E', e' , desgleichen auf dem dritten und vierten die Punkte E'', e'' von derselben Bedeutung u. s. f. Die Folge der Punkte $E, E', E'', \dots$, nämlich der Punkte kürzesten Abstandes jedes Krümmungshalbmessers von dem folgenden fällt in die Grenze mit der Folge der Punkte $e, e', e'' \dots$, nämlich der Punkte kürzesten Abstandes jedes Krümmungshalbmessers von dem vorhergehenden zusammen. Sie bilden eine Curve, welche die Strictionslinie der Fläche genannt wird. Jede windschiefe Fläche hat eine Strictionslinie; sie hat für diese Flächen ungefähr die Bedeutung, welche die Gratlinien für die abwickelbaren Flächen hat. Sie bildet im Allgemeinen einen veränderlichen Winkel mit den Erzeugungslinien. Ist der Winkel constant und ein

rechter, so hat die Fläche eine „orthogonale Striction“, ist der Winkel Null, so fällt das Element der Strictionslinie und mit ihm seine Tangente in die Erzeugungslinie, die Erzeugungslinien sind also Tangenten an die Strictionslinie und die Fläche geht über in eine abwickelbare Fläche. Man kann also jede abwickelbare Fläche als eine windschiefe ansehen mit verschwindendem Strictionswinkel.

Die kürzeste Linie zwischen zwei sich im Raume kreuzenden Geraden ist senkrecht zu beiden, nämlich senkrecht zur Ebene, welche beiden parallel läuft. Nun ist die rectificirende Gerade senkrecht zu zweien aufeinanderfolgenden Krümmungshalbmessern oder senkrecht zur Ebene der ganzen Krümmung, daher ist der kürzeste Abstand zweier Krümmungshalbmesser parallel der rectificirenden Geraden und senkrecht zur Ebene der ganzen Krümmung.

Sind E, e (Fig. 21) die Punkte kürzesten Abstandes der Krümmungshalbmesser in den Punkten M, M' , $M'D$ die rectificirende Gerade und durch ME die Ebene ganzer Krümmung parallel zu $M'E'$ geführt, welche die rectificirende Gerade in N rechtwinklig schneidet, so wird EN parallel $M'E'$ und der Winkel $MEN = dk$, d. h. gleich dem Winkel der ganzen

Fig. 21.



Krümmung. Man erhält daher für den kürzesten Abstand Ee der beiden Krümmungshalbmesser, den wir $d\alpha$ nennen wollen: $Ee = M'N = MM' \cdot \cos H$, d. h.

Man erhält daher für den kürzesten Abstand Ee der beiden Krümmungshalbmesser, den wir $d\alpha$ nennen wollen: $Ee = M'N = MM' \cdot \cos H$, d. h.

$$d\alpha = ds \cos H = \frac{R}{r} ds = R d\sigma = \frac{R\rho}{r} d\tau = \frac{R^2}{r} dk$$

und für die Entfernung EM des Punktes E der Strictionslinie von der primitiven Curve M , die mit u bezeichnet werden möge, aus der Gleichung $MN = ds \sin H = EM \cdot dk$ (es steht nämlich die Ebene DNE senkrecht auf der rectificirenden Ebene, daher ist $\angle MNE = 90^\circ$)

$$u = \frac{ds}{dk} \cdot \sin H = \frac{ds d\tau}{dk^2} = R \sin H = \rho \sin^2 H = \frac{R^2}{\rho}, \quad R^2 = u\rho$$

d. h.

Der Radius der ganzen Krümmung ist das geometrische Mittel zwischen dem Krümmungshalbmesser

und dem Abstand der Strictionslinie auf der Fläche der Krümmungshalbmesser von der primitiven Curve.

Hieraus folgt, dass u niemals grösser als R sein kann und da R niemals grösser als ϱ ist, dass der Abstand der Strictionslinien nie grösser als der Krümmungshalbmesser sein kann. Nun kreuzt die Tangente der Curve C der Krümmungsmittelpunkte die Tangente der Curve M rechtwinklig, projecirt man daher diese Tangente und die Linie Ee kürzesten Abstandes auf die rectificirende Ebene, so fallen die Projectionen mit der Binormalen und rectificirenden Geraden zusammen und es geht die Projection von Ee zwischen der Tangente von M und der Projection der Tangente von C hindurch. Hieraus folgt, dass die Projectionen der Punkte M' und C' auf irgend eine durch den Krümmungshalbmesser ME gehende Ebene auf entgegengesetzten Seiten von ME fallen, dass mithin E , die Projection von e auf die Ebene der ganzen Krümmung zwischen M und C liegen muss,

d. h.

Die Punkte E kürzesten Abstandes auf den Krümmungshalbmessern liegen zwischen den Punkten der Curve M und den Krümmungsmittelpunkten C . Die Strictionslinie liegt daher auf der Fläche der Krümmungshalbmesser immer in dem Raume zwischen den Curven M und C .

Der Punkt E theilt den Krümmungshalbmesser $MC = \varrho$ in einem leicht zu ermittelnden Verhältniss. Es ist nämlich $EM = u = \varrho \sin^2 H$ und $EC = \varrho - u = \varrho - \varrho \sin^2 H = \varrho \cos^2 H$, mithin

$$\frac{EM}{EC} = \tan^2 H = \frac{r^2}{\varrho^2}$$

d. h.

Das Verhältniss der Entfernungen der Punkte kürzesten Abstandes von den Punkten der Curven M und C ist gleich dem quadratischen Verhältniss des Schmiegungsradius und Krümmungsradius.

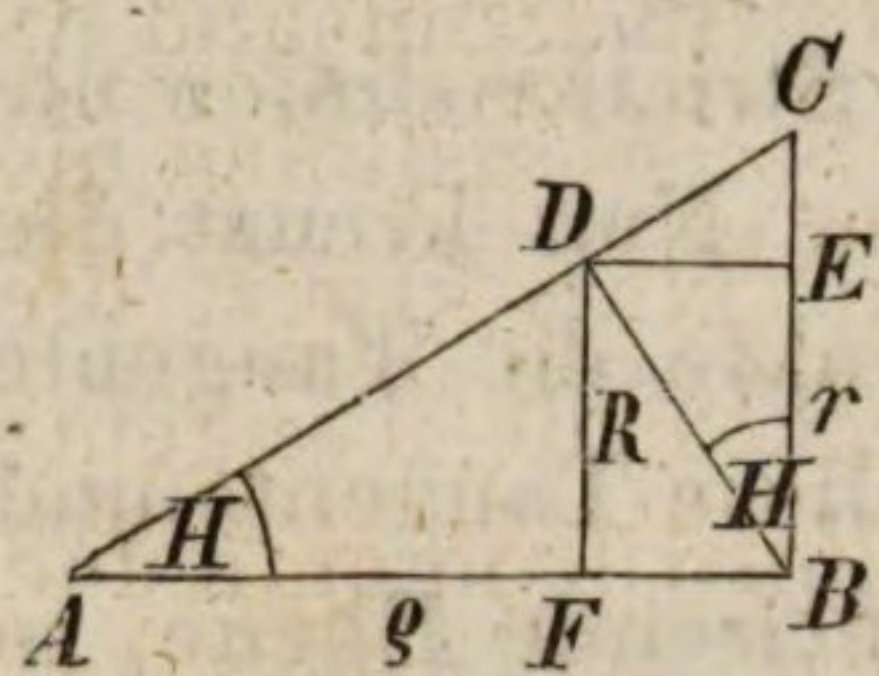
Wir fanden $d\alpha = R d\sigma = \frac{R\varrho}{r} d\tau = \frac{R^2}{r} dk$. Hieraus folgt:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = R = \frac{ds}{dk}$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{R\varrho}{r}$$

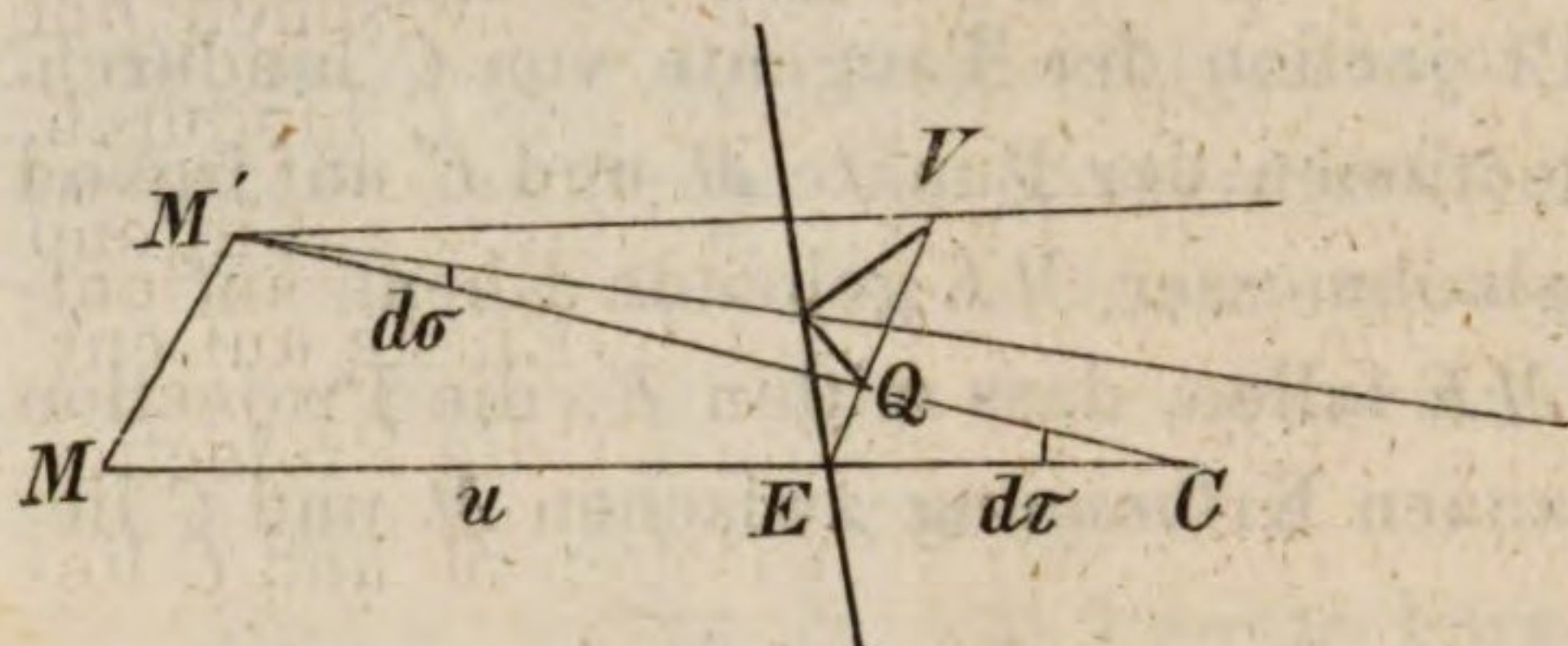
$$\frac{d\alpha}{dk} = \frac{R^2}{r}$$

Diese Linien, so wie die Länge $u = \frac{R^2}{\varrho}$ lassen sich sämtlich
 Fig. 22. in dem Cap. VI, §. 6 construirten Dreieck dar-
 stellen.



Ist nämlich (Fig. 22) $AB = \varrho$, $BC = r$,
 so wird $BD = R = \frac{d\alpha}{d\sigma}$, $AD = \frac{R\varrho}{r} = \frac{d\alpha}{d\tau}$,
 $DE = \frac{R^2}{\varrho} = u$ und $DF = \frac{R^2}{r} = \frac{d\alpha}{dk}$.

Legt man durch die Linie Ee (Fig. 23) des kürzesten Abstan-
 Fig. 23. des zweier Hauptnorma-



len eine Ebene senkrecht
 zur ersten Hauptnormale,
 so steht sie senkrecht auf
 der Schmiegungeebene u.
 schneidet sie in einer Ge-
 raden EV , welche paral-

lel der Tangente in M läuft. Eine Parallele $M'V$ zur ersten Haupt-
 normalen MC wird von ihr in einem Punkte V und die Projection
 MC der zweiten Hauptnormalen auf der Schmiegungeebene in einem
 Punkte Q getroffen, sodass eQ senkrecht zur Schmiegungeebene ist.
 Da die Ebene $VM'e$ die Richtung der Ebene der ganzen Krümmung
 hat, so steht Ee senkrecht auf ihr und das Dreieck EeV ist also
 bei e rechtwinklig, und Winkel $EeQ = H$. Nun hat man

$$eQ = M'e \cdot d\sigma = M'Q \cdot d\sigma = ME \cdot d\sigma = u d\sigma$$

$$QV = M'Q \cdot d\tau = u d\tau$$

mithin

$$\frac{QV}{eQ} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}.$$

Ferner ist

$$eQ^2 = EQ \cdot QV$$

und

$$eQ = M'Q \cdot d\sigma = EM \cdot d\sigma$$

$$EQ = EC \cdot d\tau$$

$$QV = EM \cdot d\tau$$

mithin

$$EM^2 \cdot d\sigma^2 = EC \cdot EM \cdot d\tau^2$$

oder

$$\frac{EM}{EC} = \left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)^2 = \frac{r^2}{\varrho^2}.$$

wie wir oben fanden.

§. 8. Die Ebene der ganzen Krümmung schneidet die Schmie-

gungsebene im Krümmungshalbmesser und bildet mit ihr den Winkel $\frac{\pi}{2} - H$, nämlich denselben Winkel, welchen die auf diesen beiden Ebenen senkrechten Geraden, die rectificirende Gerade und die Binormale miteinander bilden.

Da die Ebene der ganzen Krümmung senkrecht zur rectificirenden Geraden ist, so schneidet sie die rectificirende Fläche in einem Hauptnormalschnitt stärkster Krümmung, dessen Element MN (Fig. 21) ist. Da ME Normale der rectificirenden Fläche und in dem Dreieck MEN die Linien ME und NE gleich sind, so ist E der Krümmungsmittelpunkt und $ME = u$ der Krümmungshalbmesser dieses Schnitts,

d. h.

Die Strictionslinie ist der Ort der Mittelpunkte stärkster Krümmung für die rectificirende Fläche in den Punkten der Curve M .

Die Ebene, welche durch die Linie kürzesten Abstandes und die rectificirende Gerade geht, ist senkrecht zur rectificirenden Ebene, weil sie die Hauptnormale enthält; nun ist die rectificirende Ebene Schmiegungeebene der rectificirenden Kante. Daher ist diese Ebene die rectificirende Ebene der rectificirenden Kante. Die Linie DE' , welche den Punkt der rectificirenden Kante mit dem entsprechenden Punkt der Strictionslinie verbindet, fällt in diese Ebene und da der folgende kürzeste Abstand $E'E''$ durch E' geht und die ihr parallele rectificirende Gerade $M'D'$ sich mit der vorhergehenden in D schneidet, so ist die Gerade DE' die Durchschnittslinie zweier solcher Ebenen und also die Erzeugungslinie einer abwickelbaren Fläche, welche von jener Ebene berührt wird. Diese Fläche ist die rectificirende Fläche der rectificirenden Kante und enthält also nach Cap. VI, §. 7. die Mittelpunkte stärkster Krümmung der rectificirenden Fläche. Nennt man den Ort der Mittelpunkte stärkster oder schwächster Krümmung einer Fläche eine Evolutenfläche jener, so ist die vorliegende Fläche die zweite Evolutenfläche von der Tangentenfläche der Curve.

Die Ebene der ganzen Krümmung erzeugt ebenfalls eine abwickelbare Fläche. Sie ist die Asymptotenfläche der Fläche der Krümmungshalbmesser. Eine Ebene nämlich, welche durch die Erzeugungslinie einer windschiefen Fläche und ihren kürzesten Abstand von der nächsten Erzeugungslinie gelegt wird, ist Tangentenebene der Fläche in dem Durchschnittspunkt des kürzesten Abstandes mit der ersten Erzeugungslinie. Lässt man

nun diese Ebene sich um die Erzeugungslinie drehen, so bleibt sie immer Tangentenebene der Fläche, nämlich in dem Punkte der Erzeugungslinie, in welchem diese von einem Perpendikel getroffen wird, welches in ihrem Durchschnittspunkt mit der folgenden Erzeugungslinie auf sie gefällt werden kann. Wird die Ebene senkrecht zum kürzesten Abstand, also parallel der folgenden Erzeugungslinie, so schneidet sie diese im unendlich fernen Punkte und ihr Berührungspunkt rückt gleichfalls ins Unendliche; sie wird also eine Asymptotenebene der Fläche. Daher sind die Ebenen der ganzen Krümmung die Asymptotenebenen der Fläche der Krümmungshalbmesser. Da die Asymptotenebene durch den unendlich fernen Punkt der folgenden Erzeugungslinie und die folgende Asymptotenebene durch diese Erzeugungslinie selbst, also auch durch deren fernen Punkt geht, so liegt dieser in beiden, d. h. die Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche der Ebenen ganzen Krümmung ist parallel dem Krümmungshalbmesser. Daher ist die Fläche selbst asymptotisch zu dieser.

§. 9. Das Bogenelement $\overline{EE'} = d\overline{s}$ der Strictionslinie folgt aus dem Dreieck EeE' , in welchem $Ee = d\alpha$ und $eE' = M'E' - M'e = M'E' - ME = du$, nämlich

$$d\overline{s}^2 = d\alpha^2 + du^2$$

oder weil $d\alpha = ds \cos H = \frac{R}{r} ds = R d\sigma = \frac{R\rho}{r} d\tau = \frac{R^2}{r} dk$ und

$$u = \frac{ds}{dk} \sin H = R \sin H = \rho \sin^2 H = \frac{R^2}{\rho}$$

$$\overline{ds}^2 = (ds \cos H)^2 + (d \cdot \frac{R^2}{\rho} \sin^2 H)^2 = R^2 d\sigma^2 + \left(d \cdot \frac{R^2}{\rho} \right)^2.$$

Hat die Curve insbesondere gleichzeitig constanten Krümmungs- und Schmiegungradius, ist sie also nach Cap. VI, §. 13 (VIII) eine Helix auf einem Kreiscylinder, so ist $du = 0$, mithin $d\overline{s} = d\alpha = R d\sigma$ und es fällt dann das Element der Curve E in die Linie kürzesten Abstandes und da in diesem Falle die rectificirende Fläche der Cylinder ist, so fallen alle Linien kürzesten Abstandes zusammen und die Curve E ist eine Gerade, und zwar findet das letztere ausschliesslich in diesem Falle statt. Allgemein ist $du = 0$ wenn $\frac{R^2}{\rho}$ constant ist. Daher schneidet die Strictionslinie der Fläche der Hauptnormalen blos dann die Hauptnormalen rechtwinklig, wenn das Quadrat des Radius der ganzen Krümmung proportional dem Krümmungshalbmesser ist.

§. 10. Wir suchen jetzt den Neigungswinkel der Tangente der Strictionslinie gegen den Krümmungshalbmesser, gegen die rectifi-

circirende Gerade, gegen die Tangente und Binormale der Curve M , so wie gegen die Tangente der Curve C ; sie seien der Reihe nach η , ϑ , φ , χ , ψ . Da die Tangente von E in die Ebene fällt, welche durch den Krümmungshalbmesser und die rectificirende Gerade geht und diese Ebene senkrecht steht auf der Ebene der ganzen Krümmung, so ist eine aus der Tangente EE' , dem Krümmungshalbmesser ME und der Projection NE des folgenden Krümmungshalbmessers auf die Ebene der ganzen Krümmung gebildete Ecke (Fig. 24) rechtwinklig und daher

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{Ee}{eE'} = \frac{d\alpha}{du} = \frac{ds \cos H}{d(\rho \sin^2 H)}.$$

Daher ist η zugleich die Neigung der Tangente von E gegen die Ebene der ganzen Krümmung. Die Neigung ϑ gegen die rectificirende Ebene ist offenbar

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \eta.$$

Um die Winkel φ und χ zu finden, ziehen wir durch E Linien ET , EB (Fig. 25) parallel der Tangente und Binormale (oder Krümmungsaxe) von M und erhalten sofort

$$\cos \varphi = \cos H \cdot \sin \eta, \quad \cos \chi \sin H \cdot \sin \eta.$$

Den Winkel ψ endlich erhält man aus einer Ecke, gebildet von der Tangente EE' (Fig. 26), der Linie kürzesten Abstandes der beiden Hauptnormalen und einer Linie parallel zur Tangent der Curve C . In dem dieser Ecke entsprechenden sphärischen Dreiecke $E'DC'$ ist $E'D = \frac{\pi}{2} - \eta$, $C'D = \xi$, nämlich gleich dem Winkel zwischen der Tangente der Curve C und der rectificirenden Geraden (§. 3), und Winkel $C'DE' = \frac{\pi}{2} - H$, weil die Tangente von C in der Normalebene von M und die Tangente von E in der Ebene liegt, welche durch die Hauptnormale und die rectificirende Gerade geht und diese Ebenen, da sie senkrecht zur rectificirenden Ebene sind, miteinander denselben Winkel $\frac{\pi}{2} - H$ bilden, der von der Binormalen und rectificirenden Geraden gebildet wird. Daher ist

Fig. 24.

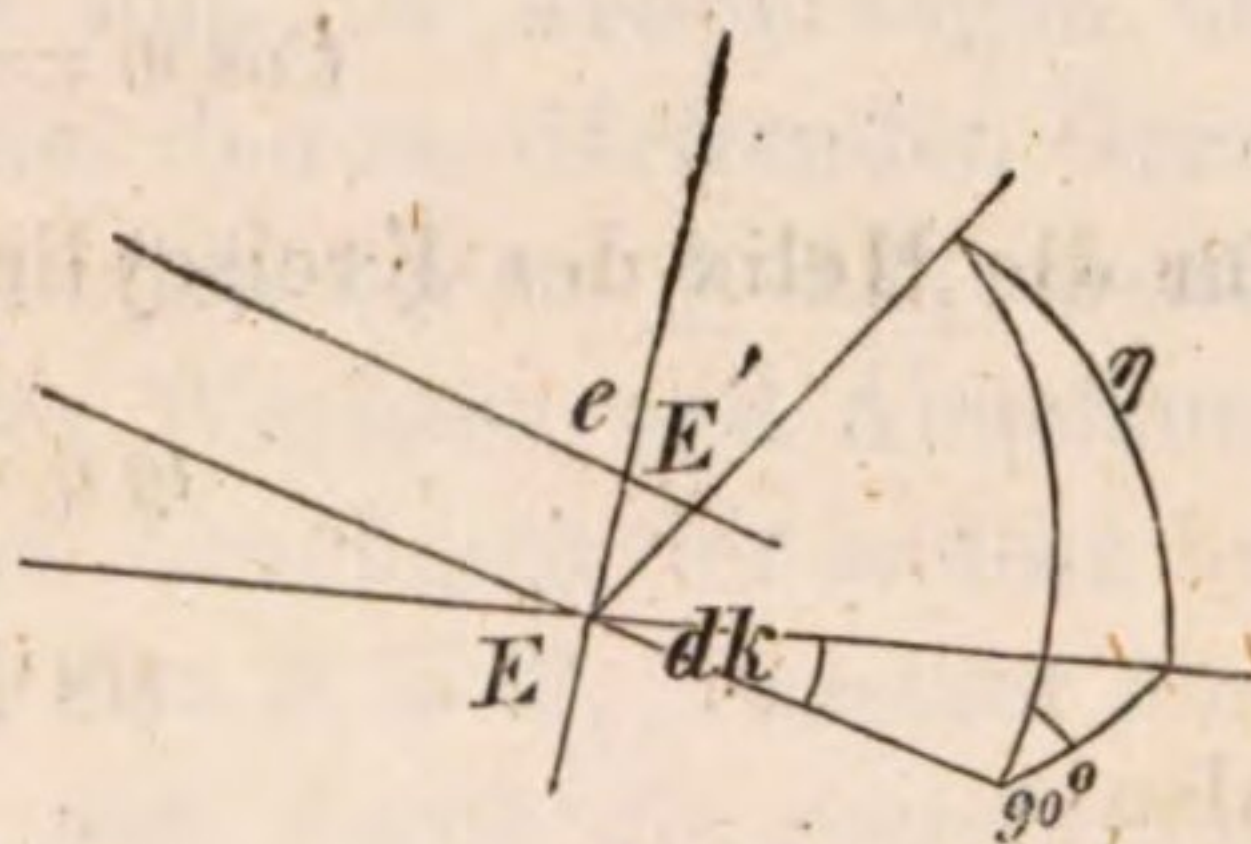


Fig. 25.

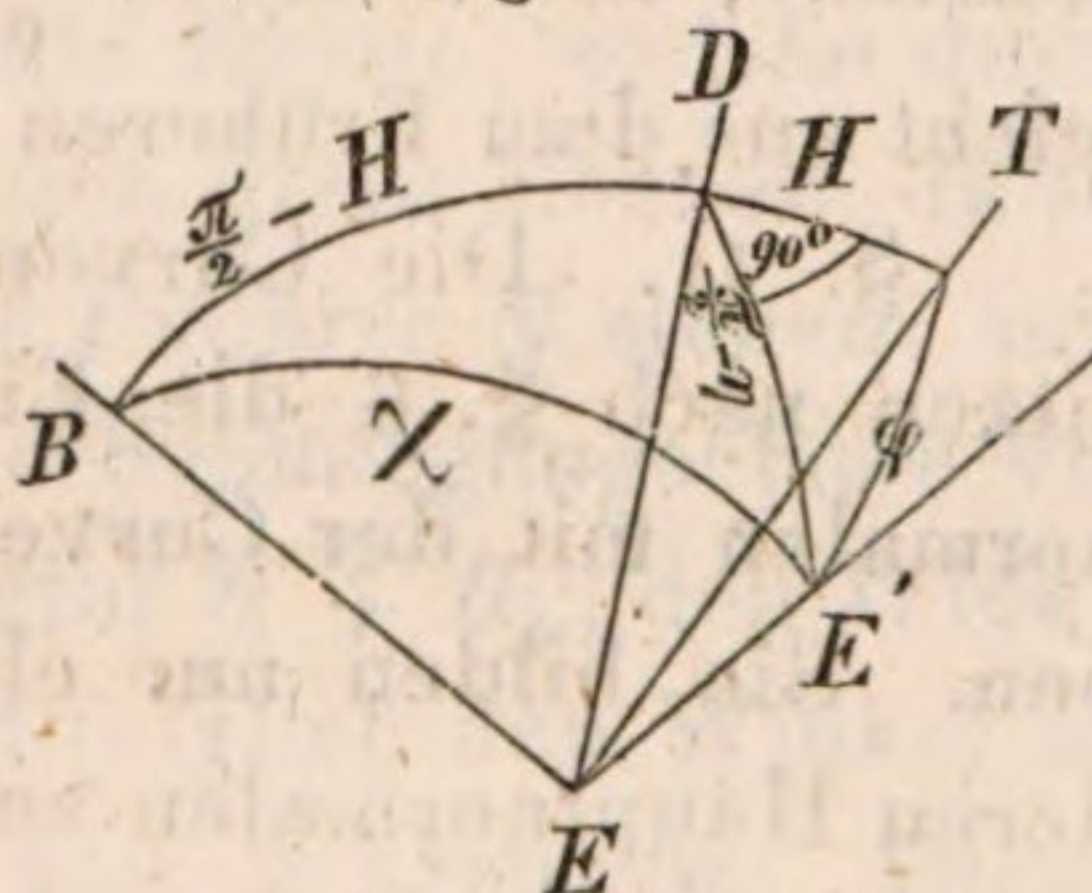
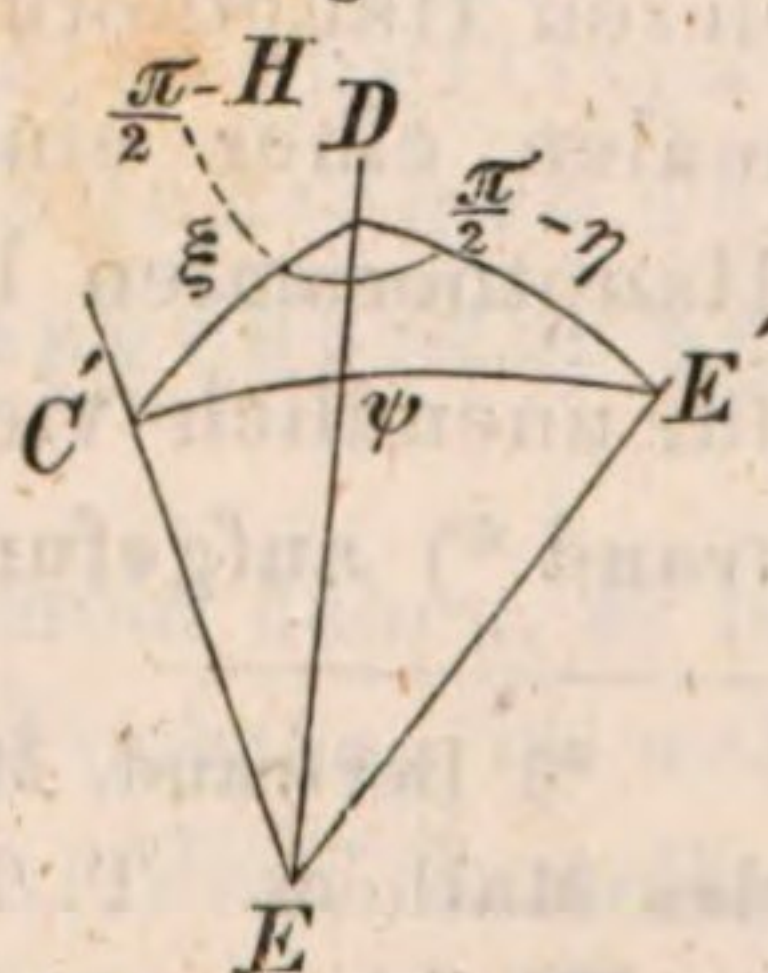


Fig. 26.



oder weil $\cos \psi = \cos \xi \sin \eta - \sin \xi \cos \eta \cdot \sin H$

$$\cos \xi = \cos \mu \cdot \sin H = \frac{R}{\frac{*}{R}}, \sin^2 \xi = 1 - \frac{R^2}{\frac{*}{R^2}} = \frac{R^2}{\frac{*}{R^2}} \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{h^2}{\varrho^2} \right)$$

ist:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= (\cos \mu \sin \eta - \sin \xi \cos \eta) \sin H \\ &= \frac{R}{\frac{*}{R}} \left(\sin \eta - \frac{1}{\varrho^2} \sqrt{\frac{*}{R^2} \varrho^2 + h^2 R^2} \cdot \cos \eta \right). \end{aligned}$$

Für die Curve von constantem Krümmungshalbmesser wird insbesondere wegen $\mu = 0$, $h = 0$, $\frac{*}{R} = \varrho$

$$\cos \psi = \frac{R}{\varrho} (\sin \eta - \cos \eta);$$

für die Helix des Kreiscylinders ist:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{ds \cos H}{d(\varrho \sin^2 H)} = \infty$$

$$\sin \eta = 1, \cos \eta = 0$$

also

$$\cos \psi = \frac{R}{\varrho}$$

constant, und zwar da $\frac{R}{\varrho} = \sin H$, so wird $\psi = \frac{\pi}{2} - \mu$, wie übrigens leicht aus dem Früheren erhellt.

§. 11. Die Curven constanten Krümmungshalbmessers ϱ besitzen nach §. 6 die Eigenschaft, dass sie die Fläche der Hauptnormalen mit der Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte gemein haben. Sie bilden nur eine Spezies einer grösseren Curvengattung, deren Hauptnormalen zugleich Hauptnormalen anderer Curven sind. Hinsichtlich einer windschiefen Fläche sind nämlich überhaupt die vier Fälle möglich: entweder es gibt keine einzige Curve auf ihr, deren Hauptnormalen sie enthält, oder sie ist Fläche der Hauptnormalen einer einzigen Curve oder ihre Erzeugungslinien sind die Hauptnormalen bloß von zwei Curven oder sie sind es gleichzeitig für unendlich viele Curven. Die Bedingungen hiefür sind von Bertrand *) aufgefunden und von Serret **), Voizot ***) und Curtis †)

*) Bertrand, Mém. sur la theorie des courbes à double courbure. Journ. des Mathém. T. XV. p. 332.

**) Serret, sur un theoreme relatif aux courbes à double courbure. Journ. des Math. T. XVI.

***) Voizot, Note sur la theorie des courbes à double courbure. Ibid. T. XV. p. 481.

†) Curtis, sur la surface engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure Ibid. II^{ème}. Serie T. I, p. 223.

einfacher bewiesen worden, nachdem schon Graves bereits einen kleinen Irrthum Bertrands berichtigt hatte.

Sind nämlich $MM'M'' \dots$ und $NN'N'' \dots$ zwei Curven einer windschiefen Fläche, deren gerade Erzeugungslinien $MN, M'N', M''N'', \dots$ gleichzeitig Hauptnormalen beider Curven in den Punkten M und N, M' und N', M'' und $N'', \dots$ sind, so haben beide Curven offenbar auch die sämtlichen Ebenen der ganzen Krümmung gemein, und besitzen parallele rectificirende Ebenen und rectificirende Geraden. Daher bilden auch zwei rectificirende Geraden der einen Curve denselben Winkel dH , wie die ihnen parallelen rectificirenden Geraden der andern, d. h. es sind die Aenderungen der Winkel H, H_1 , welche ihre Tangenten mit den rectificirenden Geraden bilden, absolut genommen gleich, nämlich $dH = \pm dH_1$, wobei sich die Zeichen $\pm$ auf ein gleichzeitiges Wachsen und Abnehmen beider oder ein Wachsen des einen und Abnehmen des andern beziehen. Daher ist also $d(H \mp H_1) = 0$, also $H \mp H_1$, constant über die beiden Curven hinweg. Legt man nun durch die gemeinsame Hauptnormale MN und die Tangente in M die Schmiegungeebene und durch dieselbe Hauptnormale und die Linie ihres kürzesten Abstandes von der folgenden Hauptnormalen die Ebene, welche durch die rectificirende Gerade in M geht, so bilden diese Ebenen, da sie senkrecht auf der rectificirenden Ebene des Punktes M stehen, miteinander den Winkel H . Ebenso bildet die Schmiegungeebene von N mit jener Ebene den Winkel H_1 . Daher gibt $H \mp H_1$, den Winkel der Schmiegungeebenen beider Curven und folglich den Winkel an, unter welchem sich die Tangenten in M und N kreuzen. Dieser Winkel ist also constant,

d. h.:

Haben zwei Curven M und N gemeinschaftliche Hauptnormalen, so kreuzen sich ihre Tangenten in den Punkten, die derselben Hauptnormale angehören, unter constantem Winkel.

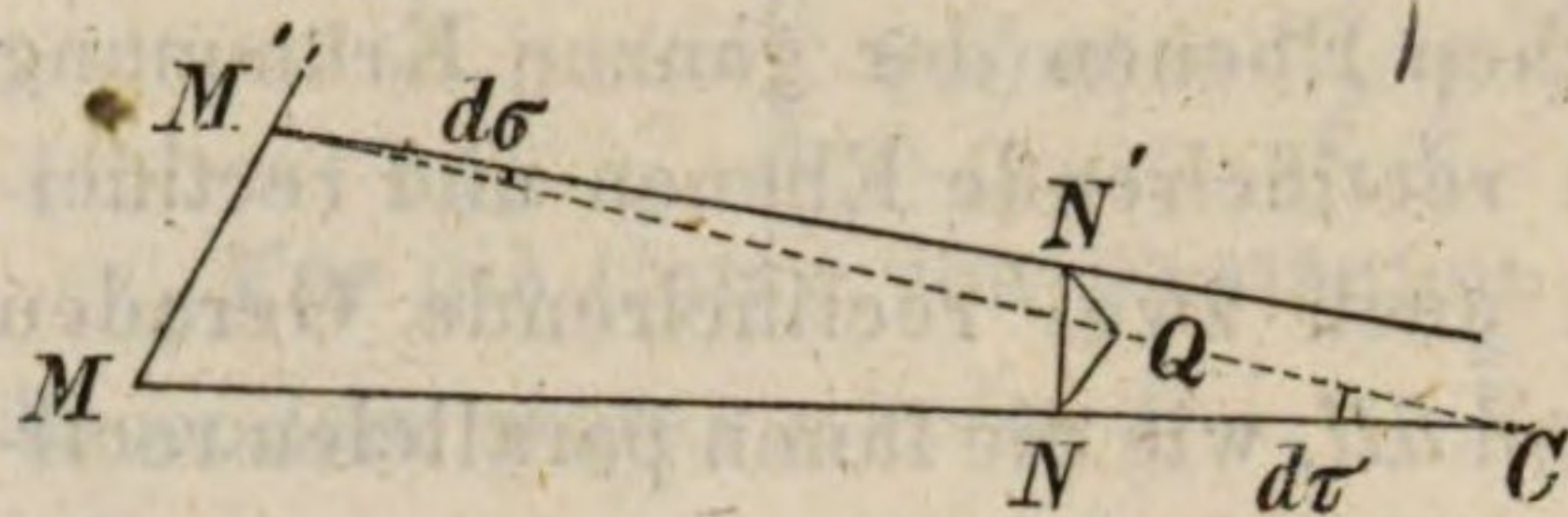
Da die beiden Curven die Hauptnormalen gemein haben, so ist auch der Winkel der ganzen Krümmung in den Punkten, in welchen sie von derselben Hauptnormalen getroffen werden, derselbe. Ist dieser dk , so wird, da die Tangenten in M und N auf der Hauptnormale MN senkrecht stehen, $M'N' = MN \cdot \cos dk$, d. h. $M'N' = MN$; ebenso $M''N'' = M'N'$ u. s. f.,
d. h.

Zwei Curven, welche gemeinschaftliche Haupt-

normalen besitzen, haben constanten Abstand voneinander.

§. 12. Es sei C der Krümmungsmittelpunkt der einen Curve M , also $\sphericalangle MCM' = d\tau$, $\sphericalangle CM'N' = d\sigma$ und a der constante Abstand $MN = M'N'$ beider Curven; in N construiren wir die rectificirende

Fig. 27.



Ebene, welche auf $M'C$ den Punkt Q bestimmt. Da diese Ebene senkrecht zur Hauptnormalen NM ist, so steht sie senkrecht auf der Schmiegungeebene MCM' des Punktes M und da $M'C$ die Projection der folgenden Hauptnormale $M'N'$ auf diese Schmiegungeebene ist, so wird QN' senkrecht zur Schmiegungeebene und also $\sphericalangle NQN'$ und $\sphericalangle N'QM'$ gleich 90° . Ausserdem wird QN parallel MM' und es ist also $\sphericalangle N'NQ$ der constante Winkel, unter welchem sich die Tangenten der beiden Curven kreuzen. Setzen wir die Cotangente dieses Winkels gleich c , so ist

$$\frac{NQ}{N'Q} = c.$$

Aus den Dreiecken NCQ und $M'QN'$ folgt aber wegen $MN = M'N' = M'Q = a$

$$NQ = \pm (\varrho - a) d\tau, \quad N'Q = a d\sigma,$$

daher wird

$$\pm \frac{\varrho - a}{a} \cdot \frac{d\tau}{d\sigma} = c$$

oder weil $\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}$ ist, wenn r den Schmiegunghalbmesser von M bedeutet, wenn man ein wenig transformirt,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\varrho} \pm \frac{c}{r}$$

oder, wenn

$$\pm ac = b$$

gesetzt wird

$$1 = \frac{a}{\varrho} + \frac{b}{r}.$$

Dies ist die von Bertrand gefundene Relation:

Wenn die Hauptnormalen einer Curve M zugleich Hauptnormalen einer andern Curve N sein sollen, so muss zwischen den beiden Krümmungen $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{r}$ der Curve M eine lineäre Relation bestehen.

Man sieht leicht, dass wenn umgekehrt diese Bedingung erfüllt ist, die Curven gemeinschaftliche Hauptnormalen haben.

Wäre man umgekehrt von der Curve N ausgegangen und hätte in M die rectificirende Ebene construirt und dort die Constructionen ausgeführt, die wir an N vorgenommen, so hätte man erhalten

$$1 = \frac{-a}{\varrho_1} + \frac{b}{r_1}$$

wo ϱ_1, r_1 für N dieselbe Bedeutung haben, wie ϱ, r für M .

Die Curven constanten Krümmungshalbmessers entsprechen dem Falle $c = 0, b = 0$; für sie ist $\varrho = a$ und der Winkel, den die Tangenten miteinander bilden, ein Rechter. Für $c = 1$ wird $b = a$ und jener Winkel 45° . Die Bedingungsgleichung geht über in

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r},$$

es genügen also auch die Curven, für welche die Summe der beiden ersten Krümmungen constant ist, der Aufgabe.

§. 13. Man kann die Bedingungsgleichung für die Curve M des vorigen §. auch so schreiben

$$ds = a d\tau + b d\sigma$$

und analog für die Curve N

$$ds_1 = a d\tau_1 + b d\sigma_1;$$

verbindet man hiemit die Bedingung

$$d\tau^2 + d\sigma^2 = d\tau_1^2 + d\sigma_1^2 = dk^2$$

so kann man mit Hülfe dieser drei Gleichungen $ds_1, d\tau_1, d\sigma_1$, also auch ϱ_1, r_1 , für die Curve N durch die entsprechenden Grössen der Curve M und a und b darstellen. Man findet:

$$\begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot d\sigma \\ d\tau_1 &= \frac{-a d\sigma + b d\tau}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d\sigma_1 = \frac{a d\tau + b d\sigma}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \varrho_1 &= \frac{ds_1}{d\tau_1} = \frac{(a^2 + b^2) d\sigma}{b d\tau - a d\sigma} = \frac{\frac{a^2 + b^2}{r^2}}{\frac{b}{\varrho r} - \frac{a}{r^2}} \end{aligned}$$

oder wegen

$$\begin{aligned} b &= r \left(1 - \frac{a}{\varrho} \right) \\ \varrho_1 &= \frac{\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\varrho} \right)^2}{\frac{1}{\varrho} - a \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2} \right)} \end{aligned}$$

und ebenso

$$r_1 = r \left[\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\varrho} \right)^2 \right].$$

§. 14. Uebrigens kann man auch einige dieser Ausdrücke direct durch geometrische Betrachtungen erhalten. Insbesondere ist z. B.

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= \overline{NN'}^2 = \overline{NQ}^2 + \overline{QN'}^2 = \overline{NQ}^2 + c^2 \overline{NQ}^2 = (1 + c^2) \overline{NQ}^2 \\ &= (1 + c^2) \cdot (M'N' \cdot d\sigma)^2 = (1 + c^2) a^2 d\sigma^2 = (a^2 + b^2) d\sigma^2. \end{aligned}$$

Bildet man zu dieser Gleichung

$$ds_1^2 = (a^2 + b^2) d\sigma^2$$

die entsprechende

$$ds^2 = (a^2 + b^2) d\sigma_1^2$$

so erhält man durch Combination derselben

$$\frac{ds}{d\sigma} \cdot \frac{ds_1}{d\sigma_1} = a^2 + b^2$$

d. h.

$$r \cdot r_1 = a^2 + b^2.$$

Es ist also das Produkt der Schmiegungradien beider Curven constant.

Ferner ist, wenn R, R_1 die Radien der ganzen Krümmung der Curven bedeuten

$$\frac{ds}{dk} = R, \quad \frac{ds_1}{dk} = R_1.$$

daher

$$ds : ds_1 = R : R_1$$

d. h.

Die Bogenelemente beider Curven verhalten sich, wie die Radien der ganzen Krümmung.

§. 15. Aus den beiden Gleichungen

$$1 = \frac{a}{\varrho} + \frac{b}{r}$$

$$1 = \frac{-a}{\varrho_1} + \frac{b}{r_1}$$

folgt noch wegen $\frac{b}{a} = c$, wenn man mit a dividirt und sie dann subtrahirt:

$$c = \frac{\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}}.$$

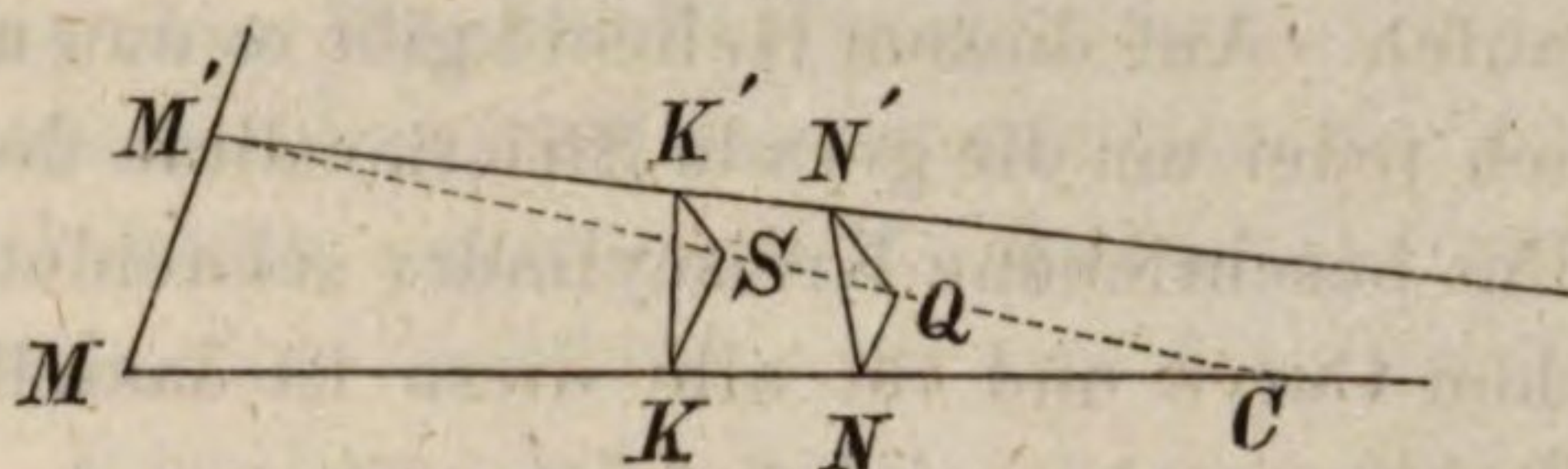
Eliminirt man b , so kommt

$$a = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{r}}.$$

§. 16. Gibt es auf einer windschiefen Fläche drei Curven $MM'M''$, $NN'N''$, $KK'K''$, für welche die

Erzeugungslinien derselben gleichzeitig die Hauptnormalen sind, so haben die Curven constanten Krümmungs- und Schmiegunghalbmesser und sind folglich (Cap. VI. §. 13 [VIII]) Helixe von Kreiscylindern.

Fig. 28.



Sind nämlich $MN = M'N' = M'Q = a$ und $MK = M'K' = MS = a'$ die constanten Abstände der Curven N und K von der Curve M und haben S und Q dieselbe Bedeutung, welche Q in §. 12 hatte, so sind auch die drei Verhältnisse

$$\frac{SK'}{SK}, \frac{N'Q}{SK'}, \frac{NQ}{N'Q}$$

constant. Das erste ist nämlich die Tangente der constanten Neigung der Curve K gegen die Curve N , das zweite ist gleich $\frac{M'Q}{M'S} = \frac{a}{a'}$ und das dritte gibt die Contangente der Neigung der Curve N gegen die Curve M an. Daher ist auch der Werth ihres Produkts, nämlich das Verhältniss

$$\frac{NQ}{SK}$$

constant. Nun sind aber NQ und SK parallel MM' , weil sie die Durchschnitte der drei parallelen rectificirenden Ebenen der drei Curven mit der Schmiegungeebene von M sind, daher ist auch $\frac{NC}{KC}$ und folglich auch, $1 - \frac{NC}{KC}$ d. h.

$$\frac{KN}{KC}$$

constant. Es ist aber $KN = a - a'$, daher muss KC und folglich auch $MC = KC + a$ constant sein; d. h. es ist der Krümmungshalbmesser $MC = \varrho$ der Curve M constant. Ebenso ergibt sich, dass die Krümmungshalbmesser der beiden andern Curven constant sein müssen.

Weiter ist aber

$$\frac{SK}{SK'} = \frac{KC \cdot d\tau}{M'K' \cdot d\sigma} = \frac{\varrho - a'}{a'} \cdot \frac{d\tau}{d\sigma}$$

und da dies Verhältniss nach §. 12 constant ist, so folgt, dass auch

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{r}{\varrho}$$

und da ϱ bereits constant ist, auch r constant sein muss. Ebenso für die beiden andern Curven.

Die drei Curven sind demnach Helixe auf Kreiscylindern und die Fläche ihrer gemeinschaftlichen Hauptnormalen ist mithin ein windschiefes Helicoid, dessen Erzeugungslinien alle einer Ebene parallel laufen. Auf diesem Helicoid gibt es nun unzählig viele Helixe, nämlich jeder um die gerade Strictionslinie derselben mit beliebigem Radius beschriebene Kreiscylinder schneidet das Helicoid in einer solchen Curve und für alle diese ist dasselbe gemeinsame Fläche der Hauptnormalen; daher folgt weiter:

Gibt es auf einer windschiefen Fläche drei Curven, für welche sie gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen ist, so gibt es unendlich viele und ist die Fläche ein Helicoid; sowie:

Das windschiefe Helicoid ist die einzige Fläche auf welcher es mehr als zwei Curven gibt, für welche die Erzeugungslinien der Fläche gemeinschaftliche Hauptnormalen sind.

Auf einer beliebigen windschiefen Fläche, welche nicht Helicoid ist, gibt es also höchstens zwei Curven von der erwähnten Eigenschaft. Bertrand hatte den Satz aufgestellt, dass es unmöglich sei, dass eine windschiefe Fläche für zwei verschiedene Curven zugleich Fläche der Hauptnormalen sei, wenn die Strictionslinie der Fläche die Erzeugungslinie rechtwinklig schneide. Graves hat diesen Satz berichtigt. Das Helicoid hat in der That eine Gerade als Strictionslinie, welche die sämtlichen Erzeugungslinien rechtwinklig schneidet.

Cap. VIII.

Die Fläche der Binormalen.

§. 1. Nach Cap. I. §. 9 erzeugen die Binormalen einer Curve M eine windschiefe Fläche, auf welcher die Curve selbst liegt und den Durchschnitt derselben mit der Fläche der Hauptnormalen und der rectificirenden Fläche darstellt. Die Curve schneidet die Binormalen unter rechten Winkeln und da zwei aufeinanderfolgende Binormalen auf den zugehörigen Schmiegungebenen senkrecht stehen und diese sich in der Tangente der Curve schneiden, so stehen sie auch beide auf dieser senkrecht. Es ist daher die

Tangente der Curve M die Linie kürzesten Abstandes zweier aufeinanderfolgender Binormalen. Da dies von jeder Tangente gilt und diese sich in den Punkten der Curve schneiden, so folgt, dass die Curve M die Strictionslinie der Fläche ihrer Binormalen ist und dass die Fläche der Binormalen stets eine orthogonale Striction hat. Umgekehrt ist jede windschiefe Fläche mit orthogonaler Strictionslinie die Fläche der Binormalen dieser Curve. Denn jede Erzeugungsline steht senkrecht auf der Linie ihres kürzesten Abstandes von der vorhergehenden und gleichzeitig senkrecht auf der Linie ihres kürzesten Abstandes von der folgenden Erzeugungsline. Daher steht sie senkrecht auf beiden, also auch auf der Ebene beider. Da diese Linien aber Tangenten der Strictionslinie sind, so ist ihre Ebene die Schmiegungeebene dieser Curve und folglich die Erzeugungsline der Fläche im Punkte der Strictionslinie senkrecht auf deren Schmiegungeebene, d. h. die Binormale.

§. 2. Die Binormalen einer Curve sind parallel den Krümmungsaxen derselben und die Normalebene sind senkrecht zu den Linien kürzesten Abstandes der Binormalen. Daher sind die Normalebene Tangentenebene an die Fläche der Binormalen in unendlich fernen Punkten, d. h. Asymptotenebene und folglich sind die Fläche der Krümmungsaxen und die Fläche der Binormalen Asymptotenflächen von einander. (Vgl. Cap. VII. §. 8.)

§. 3. Die rectificirenden Ebenen der Curve sind Tangentenebene der Fläche in den Punkten der Curve, daher ist die rectificirende Fläche der Fläche der Binormalen längs der Curve umschrieben.

§. 4. Ist die Curve eben, so geht die Fläche der Binormalen in einen Cylinder über, welcher mit dem rectificirenden Cylinder zusammenfällt; ist die Curve sphärisch, so sind die Binormalen alle parallel den Erzeugungslinien eines Kegels.

Cap. IX.

Die Schmiegunghelix.

§. 1. Eine Curve, welche gegen die Linien schwächster oder stärkster Krümmung einer Fläche unter constantem Winkel geneigt ist, heisst eine Loxodrome der Fläche. Ist die Fläche eine Cylinderfläche, deren Erzeugungslinien das System der Linien schwächster Krümmung bilden, so wird sie auch eine Schraubenlinie, Schneckenlinie oder eine Helix genannt. Den vorhergehenden Capiteln zufolge haben die Helixe, welche auf beliebigen Cylinderflächen liegen folgende Eigenschaften:

1. Die Cylinderfläche ist rectificirende Fläche der Helix, die Ebenen der ganzen Krümmung sind sämmtlich untereinander und die Hauptnormalen ihnen parallel; die Hauptnormalen sind Normalen des Cylinders.

2. Die Verhältnisse der Radien ϱ , r , R sind constant, nämlich

$$\frac{r}{\varrho} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{R}{\varrho} = \sin \alpha, \quad \frac{R}{r} = \cos \alpha,$$

wenn α den constanten Neigungswinkel der Helix gegen die Erzeugungslinie des Cylinders bedeutet.

3. Die Verhältnisse des Contingenz-, Schmiegungs- und des Winkels ganzer Krümmung sind constant, nämlich

$$\frac{d\tau}{dk} = \sin \alpha, \quad \frac{d\sigma}{dk} = \cos \alpha, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \operatorname{tg} \alpha$$

und dk ist zugleich der Winkel der Projectionen zweier Krümmungshalbmesser auf die Ebene ganzer Krümmung, mithin der Contingenzwinkel des Orthogonalschnitts der Fläche (Linie stärkster Krümmung).

4. Die Bogenelemente ds der Helix und ds_0 des Orthogonalschnitts stehen in dem Verhältniss

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

5. Daher stehen die Krümmungshalbmesser ϱ , ϱ_0 der Helix und des Orthogonalschnitts in dem Verhältniss

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

und es ist mithin

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sin^2 \alpha}, \quad r = \frac{\varrho_0}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad R = \frac{\varrho_0}{\sin \alpha}.$$

6. Der kürzeste Abstand zweier Krümmungshalbmesser ist die Projection des Bogenelementes auf die Erzeugungslinie des Cylinders, nämlich

$$d\alpha = ds \cdot \cos \alpha = ds_0 \cdot \cotg \alpha = \varrho_0 \cotg \alpha \cdot dk.$$

7. Die Entfernung u der Linie kürzesten Abstandes zweier Krümmungshalbmesser von dem Punkte der Curve ist

$$u = \frac{R^2}{\varrho} = \varrho_0$$

d. h.

Die Linie kürzesten Abstandes geht durch die Punkte der Evolute des Orthogonalschnitts und das Bogenelement der Strictionslinie der Fläche der Hauptnormalen hat das Bogenelement der Evolute zur Projection. Daher ist das Bogenelement der Strictionslinie durch die Gleichung gegeben

$$d\bar{s}^2 = \varrho_0^2 \cotg^2 \alpha \cdot dk^2 + d\varrho_0^2$$

und die Tangente seiner Neigung gegen die Hauptnormale ist

$$\tg \eta = \frac{ds \cos \alpha}{d(\varrho \sin^2 \alpha)} = \frac{ds_0}{d\varrho_0} \cdot \cotg \alpha.$$

8. Der Abstand des Mittelpunktes der Schmiegunskugel von dem Krümmungsmittelpunkte ist

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{d\varrho_0}{dk} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos \alpha},$$

der Radius der Schmiegunskugel

$$\overset{*}{R} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\varrho_0^2 + \left(\frac{d\varrho_0}{dk \cos \alpha} \right)^2}$$

und die Tangente seiner Neigung gegen die Schmiegungebene:

$$\tg \mu = \frac{h}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0 \cos \alpha} \cdot \frac{d\varrho_0}{dk}.$$

§. 2. Hieraus folgt noch insbesondere, wenn die Cylinderfläche im Kreiscylinder, also ϱ_0 constant ist neben den Sätzen 1—6.

7*) $ds = d\alpha = ds \cos \alpha$, $\eta = 90^\circ$; mithin ist die Strictionslinie die Axe des Cylinders.

8*) $h = 0$, $\overset{*}{R} = \varrho$, $\mu = 0$.

§. 3. Hat eine Helix auf einem Kreiscylinder mit einer Curve M doppelter Krümmung drei aufeinanderfolgende Punkte gemein, so hat sie auch die Tangente, Schmiegungebene, Hauptnormale,

rectificirende Ebene und den Krümmungskreis mit ihr gemein. Vier Punkte von ihr können aber nicht mit vier Punkten der Curve zusammenfallen, ohne dass die Curve M spezielle Eigenschaften erlangt. Denn dann müssten auch die Schmiegunskugeln zusammenfallen, was nicht angeht, da bei der Cylinderhelix der Schmiegunskugelmittelpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammenfällt, was bei einer beliebigen Curve M im Allgemeinen nicht der Fall ist. Es kann also die Cylinderhelix die Curve M im Allgemeinen nicht in der dritten Ordnung berühren. Allein durch drei Punkte ist die Helix noch nicht bestimmt. Sind nämlich M, M', M'' die drei Punkte, zieht man durch sie drei Gerade, welche gleiche Neigung gegen die Tangenten MM' und $M'M''$ haben und schneidet sie durch eine Ebene senkrecht zu ihrer Richtung, so erhält man drei neue Punkte, welche einen Kreis bestimmen, den man als Orthogonalschnitt eines Cylinders ansehen kann, auf welchem es offenbar eine Helix gibt, welche durch jene drei Punkte geht. Da man aber unendlich viele Richtungen finden kann, welche gegen die Tangenten in M und M' gleich geneigt sind, so ist der Cylinder und mit ihm die Helix unbestimmt und gibt es eine ganze Schaar Cylinder und Helixe, welche durch die drei Punkte gehen und also die Curve in der zweiten Ordnung berühren. Unter diesen Cylindern gibt es aber einen, von welchem eine Erzeugungsline mit der rectificirenden Geraden zusammenfällt, denn diese ist eine Linie, welche gegen zwei Tangenten der Curve gleich geneigt ist, weil durch Abwicklung der rectificirenden Fläche die Curve in eine Gerade übergeht. Die Helix, welche auf diesem Cylinder liegt, hat mit der Curve nicht bloß die rectificirende Ebene des Punktes M , sondern auch die rectificirende Ebene des folgenden Punktes M' gemein, welche diese in der rectificirenden Geraden schneidet, sie hat folglich mit der Curve auch die Richtung der zweiten Hauptnormale gemein, wenn auch nicht den Krümmungskreis des Punktes M' . Sie schmiegt sich daher der Curve enger an, als alle andern Helixe, welche sie in der zweiten Ordnung berühren und ihre Berührung ist, wenn man so sagen will von einer Ordnung, welche zwischen die zweite und dritte Ordnung fällt. Die Helix eines Kreiscylinders, welche mit der Curve drei aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'' und die rectificirende Gerade in M gemein hat, nennen wir die Schmiegunghelix der Curve im Punkte M .

§. 4. Die Schmiegunghelix hat mit der Curve nicht bloß den Krümmungshalbmesser, sondern auch den

Schmiegunghalbmesser gemein. Ist nämlich α der constante Winkel, unter welchem die Helix die Erzeugungslinien des Cylinders schneidet und H die Neigung der rectificirenden Geraden der Curve gegen die Tangente, so ist, weil diese Geraden zusammenfallen sollen $\alpha = H$. Sind nun ϱ , r , ϱ_0 , r_0 die entsprechenden Radien der Krümmung und Schmiegunghalbmesser der Curve M und der Helix, so ist

$$\frac{r}{\varrho} = \operatorname{tg} H, \quad \frac{r_0}{\varrho_0} = \operatorname{tg} \alpha$$

und folglich

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{r_0}{\varrho_0}$$

und da wegen des beiden Curven gemeinsamen Krümmungskreises $\varrho = \varrho_0$ ist,

$$r = r_0.$$

§. 5. Da die rectificirende Gerade die Erzeugungslinie des Cylinders ist, auf welchem die Helix liegt, so fällt der Orthogonalschnitt derselben in die Ebene der ganzen Krümmung. Daher ist die Helix bestimmt, sobald der Radius a dieses Orthogonalschnitts bekannt ist. Dieser findet sich aber aus der Gleichung

$$\frac{a}{\sin^2 \alpha} = \varrho \quad (\text{§. 1. Nr. 5.})$$

wegen $\alpha = H$, als:

$$a = \varrho \sin^2 H = \frac{R^2}{\varrho} = u.$$

Die Schmiegungebene schneidet den Cylinder in einer Ellipse, welche ϱ zum Krümmungshalbmesser hat.

§. 6. Die rectificirende Fläche ist der Ort der Erzeugungslinien der Cylinder, auf welchen die Schmiegunghelixe liegen. Die Axen dieser Cylinder sind die Linien kürzesten Abstandes der Hauptnormalen und bilden eine Fläche, deren Erzeugungslinien den rectificirenden Geraden parallel ist. Diese Fläche ist windschief und asymptotisch zur rectificirenden Fläche.

§. 7. Zufolge §. 3 muss die Erzeugungslinie eines Kreiscylinders, welcher die Curve in der zweiten Ordnung berühren soll, gleiche Neigung gegen zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Curve haben. Der Ort aller solcher Geraden ist eine Ebene, welche senkrecht auf der Schmiegungebene steht und den Contingenzwinkel halbirt. Diese Ebene fällt in der Grenze mit der rectificirenden Ebene zusammen. Daher:

Der Ort der Erzeugungslinien der Cylinder, wel-

che eine Curve doppelter Krümmung in der zweiten Ordnung berühren, ist die rectificirende Ebene.

Unter der Schaar dieser Cylinder ist einer, dessen Erzeugungsline mit der Binormalen zusammenfällt, er geht durch den Krümmungskreis und ist bereits oben Cap. V, §. 10 erwähnt worden und einer, dessen Erzeugungsline die Tangente ist, er fällt mit der Schmiegungeebene zusammen. Macht die Erzeugungsline mit der Tangente einen Winkel β , so ist der Contingenzwinkel des Orthogonalschnitts $\frac{d\tau}{\sin\beta}$ und sein Bogenelement $ds \sin\beta$, folglich der Radius derselben $\frac{ds}{d\tau} \sin^2\beta$ oder $\rho \sin^2\beta$. Für $\beta = 90^\circ$ erreicht dieser Ausdruck sein Maximum.

Cap. X.

Die cyclificirenden Flächen.

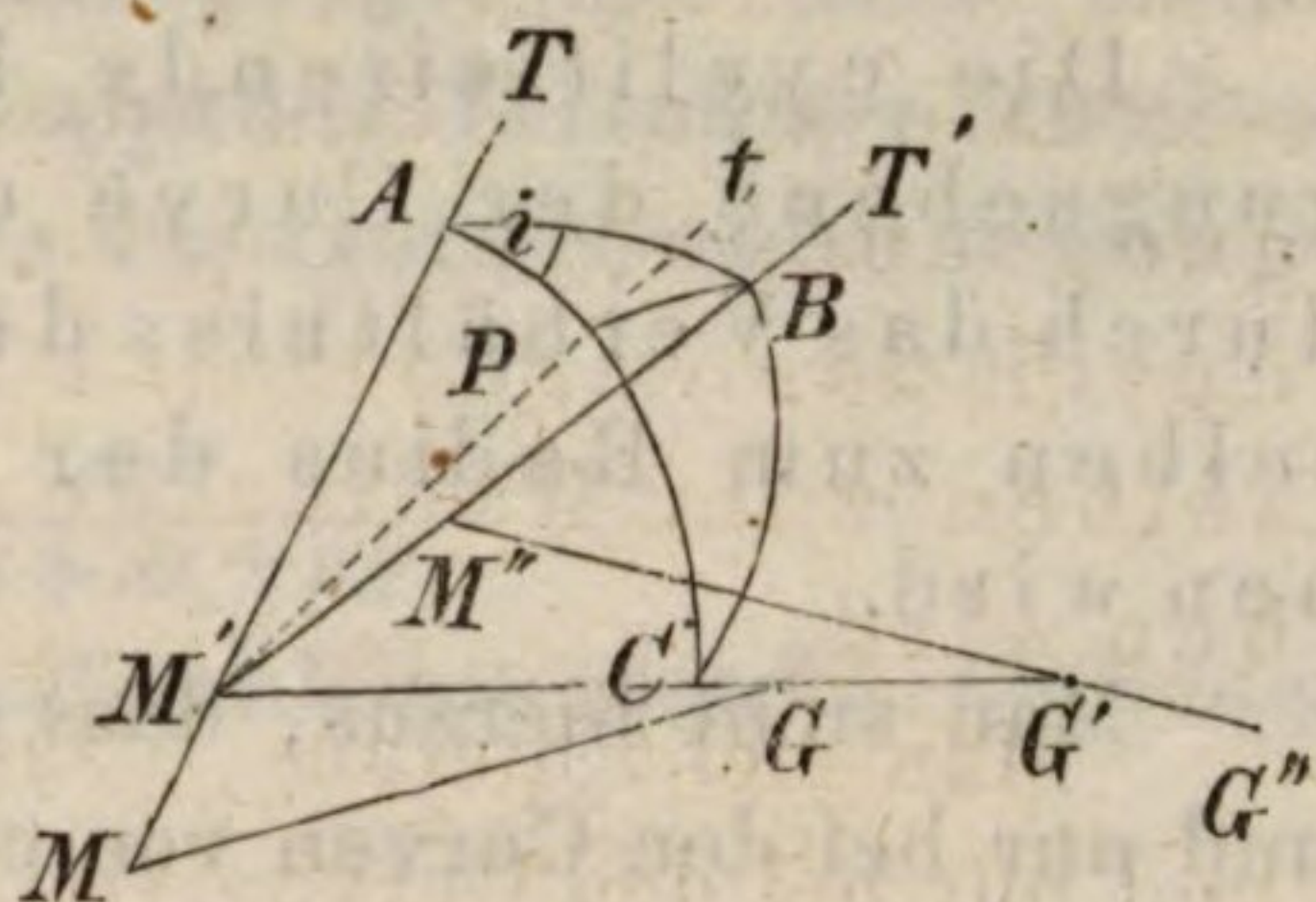
§. 1. Die rectificirende Fläche ist die abwickelbare Fläche, welche durch die Curve hindurchgeht und bei ihrer Abwicklung dieselbe in eine Gerade transformirt. Das Problem, die rectificirende Fläche einer Curve zu finden, ist nur ein spezieller Fall eines allgemeineren, welches verlangt, durch die Curve eine abwickelbare Fläche zu legen, durch deren Abwicklung dieselbe in einen Kreis von gegebenem Radius A oder wenigstens ein Bogen der Curve in einen Kreisbogen von diesem Radius übergeht. Eine solche Fläche nennen wir eine cyclificirende Fläche der Curve, ihre Tangentenebenen die cyclificirenden Ebenen und ihre Erzeugungslinien die cyclificirenden Geraden derselben*). Wird der Radius $A = \infty$, so geht der Kreis in eine Gerade und die cyclificirende Fläche in die rectificirende über.

Zunächst ist leicht zu zeigen, dass die cyclificirende Fläche für den Radius A nur dann möglich ist, wenn A nicht kleiner, als der grösste Krümmungsradius der zu transformirenden Curve oder des zu

*) Cf. Molins, de la surface développable passant par une courbe donnée quelconque, et qui, par son développement, transformerait cette courbe en un arc de cercle de rayon donné. Journ. d. Math. II^{ème} Série. T. I. p. 265.

transformirenden Theiles derselben ist. Sind nämlich (Fig. 29) MG , $M'G'$, $M''G''$ die drei durch die Punkte M , M' , M'' gehenden cyclificirenden Geraden und dreht man das Flächenelement $M'GM''$ um die Gerade $M'G$ um, bis es mit dem Flächenelemente $M'GM$ in eine Ebene fällt, so gelangt die Tangente $M'T'$ in die Lage $M't$ und geht der Contingenzwinkel $TM'T' = d\tau$ der Curve doppelter Krümmung in den Contingenzwinkel $TM't = d\tau_1$ der transformir-

Fig. 29.



ten ebenen Curve, des Kreises, über. Bei dieser Bewegung beschreibt die Tangente $M'T'$ das Element eines geraden Kegels um $M'G$ als Axe und da dessen Ebene $T'M't$ demzufolge senkrecht steht auf der Ebene $TM'G$, so bilden die drei Tangenten $M'T$, $M'T'$ und $M't$ eine an der Kante $M't$ rechtwinklige Ecke und ist mithin $\sphericalangle TM'T'$ nicht kleiner als $\sphericalangle TM't$, d. h. $d\tau$ nicht kleiner als $d\tau_1$ und da das Bogenelement $MM' = ds$ hierbei nicht alterirt wird, so folgt aus den Gleichungen

$$d\tau = \frac{ds}{\rho}, \quad d\tau_1 = \frac{ds}{A},$$

worin ρ den Krümmungshalbmesser in M bedeutet, dass A nicht kleiner als ρ sein kann. Da dies in allen Punkten der Curve M gilt, so folgt, dass die Transformation nur insoweit möglich, also die cyclificirende Fläche nur insoweit existiren kann, als der gegebene Radius A nicht kleiner als alle in Frage kommenden Krümmungshalbmesser ρ , d. h. nicht kleiner als der grösste unter ihnen ist.

§. 2. Um den Neigungswinkel i der cyclificirenden Ebene gegen die Schmiegungeebene der Curve M zu finden, beschreiben wir um M' mit der Einheit als Radius eine Kugel. Auf ihr bestimmen die Tangenten MT , $M'T'$ und die cyclificirende Gerade $M'G$ ein sphärisches Dreieck ABC , in welchem $\sphericalangle A = i$ ist und C den unendlich kleinen Winkel darstellt, den die cyclificirende Ebene $AM'C$ mit der folgenden cyclificirenden Ebene $BM'C$ bildet. Ein Perpendikel BP von der Ecke B auf die gegenüberliegende Seite AC gefällt, theilt diese so, dass $PC = BC$ und $AP = d\tau_1$ wird. Daher folgt aus dem unendlichkleinen bei P rechtwinklichen Dreieck ABP , in welchem $AB = d\tau$ ist

$$\cos i = \frac{d\tau_1}{d\tau}$$

und folglich mit Hülfe der vorigen Werthe für $d\tau$ und $d\tau_1$:

$$\cos i = \frac{\rho}{A},$$

d. h.

Die cyclificirende Ebene bildet mit der Schmiegungebene der Curve einen Winkel, dessen Casinus durch das Verhältniss des Krümmungshalbmessers derselben zum Radius der transformirten Curve angegeben wird. 24 0
I 06

Man sieht hieraus, dass der Winkel i im Allgemeinen variabel und nur bei den Curven von constantem Krümmungshalbmesser constant ist. Legt man durch alle Tangenten der Curve M Ebenen, welche unter dem Winkel i gegen die Schmiegungebenen geneigt sind, so sind sie die cyclificirenden Ebenen, schneiden sich in den cyclificirenden Geraden und erzeugen als Enveloppe die cyclificirende Fläche. Nun gibt es aber durch jede Tangente zwei Ebenen, welche mit der Schmiegungebene den Winkel i bilden, daher gibt es für jeden Werth von A , für welchen das Problem möglich ist, zwei cyclificirende Flächen. Für $A = \infty$ fallen beide Flächen in eine zusammen, nämlich in die rectificirende Fläche. Ist ρ_0 der grösste Krümmungshalbmesser der zu transformirenden Curve, so sind cyclificirende Flächen blos möglich für alle Werthe von A zwischen ρ_0 und ∞ . Ist der grösste Krümmungshalbmesser $\rho_0 = \infty$, so muss $A = \infty$ werden, es gibt dann nur eine cyclificirende Fläche, nämlich die rectificirende, welche die Curve in einen unendlichgrossen Kreis, nämlich in eine Gerade verwandelt.

Ist die Curve M ein Kreis, so ist ρ constant, also auch i . Die beiden cyclificirenden Flächen sind gerade Kegel und der Radius des transformirten Kreises ist $A = \frac{\rho}{\cos i}$. Für die Curven von constantem Krümmungshalbmesser $\rho = a$ ist auch i constant und da man $A = a$ setzen kann, wodurch $\cos i = 1$, also $i = 0$ wird, so folgt, dass für diese Curven die Tangentenfläche eine cyclificirende Fläche ist. Die Curven von constantem Krümmungshalbmesser gehen also durch Abwicklung ihrer Tangentenfläche in Kreise über; der Radius des Kreises ist jedesmal dem constanten Krümmungshalbmesser gleich.

§. 3. Um die Neigung ϑ der cyclificirenden Geraden $M'G'$ gegen die Tangente MT zu finden, hat man in dem Dreieck ABC : Seite $AC = \vartheta$, $BC = \vartheta - d\tau_1$ und $B = \pi - (i + di \pm d\sigma)$. Letzteres sieht man ein, wenn man bedenkt, dass die cyclificirenden

Ebenen $GM'T$ und $G'M'T'$ mit den Schmiegungebenen der Punkte M und M' die Winkel i und $i + di$, die letzteren aber mit einander den Schmiegunswinkel $d\sigma$ bilden, mithin die zweite der cyclificirenden Ebenen gegen die erste Schmiegungebene unter einem Winkel $i + di \pm d\sigma$ geneigt ist. Die doppelten Vorzeichen beziehen sich hiebei auf die eine und die andere der cyclificirenden Flächen. Daher erhält man

$$\frac{\sin(\vartheta - d\tau_1)}{\sin \vartheta} = \frac{\sin i}{\sin(i + di \pm d\sigma)}$$

und hieraus durch Reduktion auf Unendlichkleines gleicher Ordnung mit Rücksicht auf $\cos i = \frac{d\tau_1}{d\tau}$:

$$\cotg \vartheta = - \frac{di \pm d\sigma}{\sin i \cdot d\tau} = - \frac{1}{\sin i} \left\{ \frac{di}{d\tau} \pm \frac{d\sigma}{d\tau} \right\}.$$

Aus der Gleichung

$$\cos i = \frac{\varrho}{A}$$

folgt

$$di = - \frac{d\varrho}{A \sin i} = - \frac{d\varrho}{\sqrt{A^2 - \varrho^2}},$$

daher wird

$$\cotg \vartheta = \frac{\frac{d\varrho}{d\tau}}{A \left(1 + \frac{\varrho^2}{A^2} \right)} \mp \frac{\frac{d\sigma}{d\tau}}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}}$$

Für die Curven von constantem Krümmungshalbmesser ist $d\varrho = 0$, mithin

$$\cotg \vartheta = \pm \frac{\varrho \cdot A}{r \sqrt{A^2 - \varrho^2}},$$

für die Cylinderhelix wird ϑ constant.

§. 4. Wir suchen jetzt den Contingenzwinkel $d\tilde{\tau}$ und den Schmiegunswinkel $d\tilde{\sigma}$ der Gratlinie der cyclificirenden Fläche. Den ersteren erhält man aus dem Dreieck $MM'G$, in welchem $MG M' = d\tilde{\tau}$, $M'MG = \vartheta$, $AM'G = PM'G \pm AM'P = BM'G \pm AM'P = \vartheta + d\vartheta \pm d\tau$, ist, nämlich

$$d\tilde{\tau} = d\vartheta \pm d\tau_1 = d\vartheta \pm d\tau \cdot \cos i,$$

der Winkel $d\tilde{\sigma}$ ist aber der Winkel C des Dreiecks ABC , aus welchem folgt:

$$d\tilde{\sigma} = \frac{\sin i}{\sin \vartheta} \cdot d\tau$$

oder weil nach §. 3

$$\sin i \cdot d\tau = - \tg \vartheta \cdot (di \pm d\sigma)$$

$$d\tilde{\sigma} = - \frac{di \pm d\sigma}{\cos \vartheta}$$

oder weil

$$\cos \vartheta = \frac{di \pm d\sigma}{\sqrt{(di \pm d\sigma)^2 + d\tau^2 \cdot \sin^2 i}}$$

wird

$$d\tilde{\sigma}^2 = (di \pm d\sigma)^2 + d\tau^2 \cdot \sin^2 i.$$

Diesem Ausdrucke kann man noch die folgende Form geben, indem man für di und i die Werthe aus §. 3 einsetzt und für $d\varrho$ das gleichbedeutende $h d\sigma$ setzt (Cap. V. §. 2):

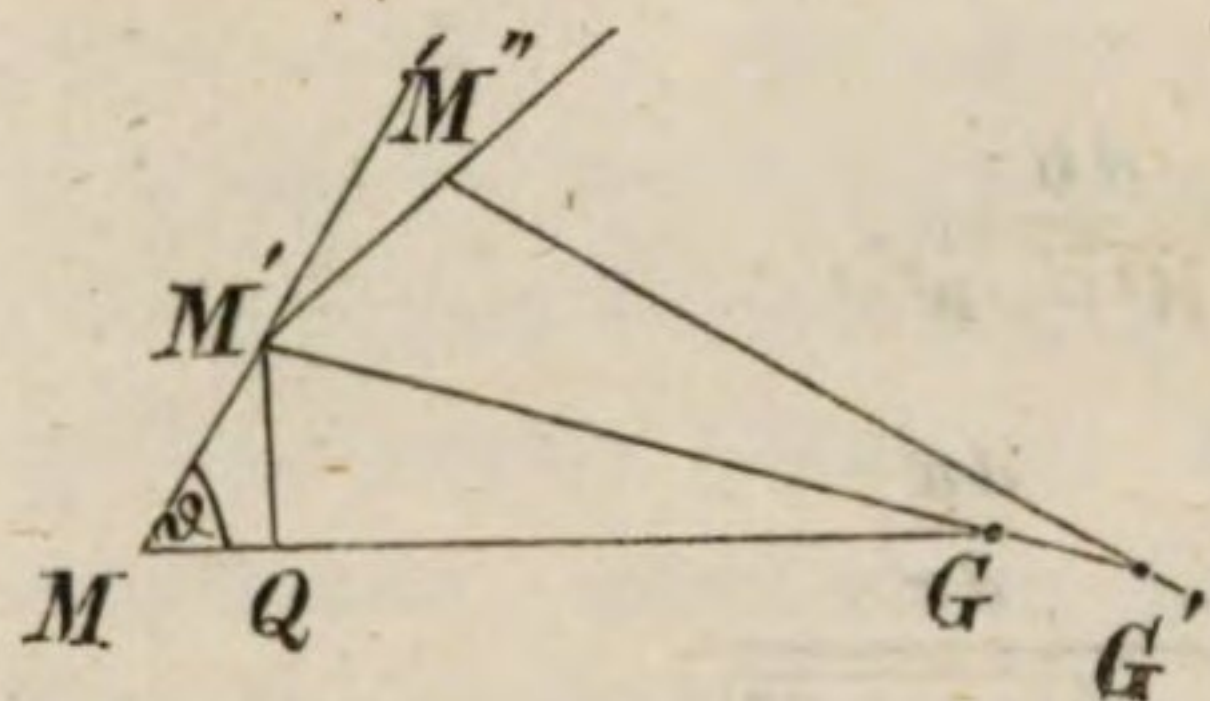
$$d\tilde{\sigma}^2 = \frac{(h \mp \sqrt{A^2 - \varrho^2})^2}{A^2 - \varrho^2} \cdot d\sigma^2 + \left(1 - \frac{\varrho^2}{A^2}\right) d\tau^2.$$

Für die Curven von constantem Krümmungshalbmesser wird

$$d\tilde{\sigma}^2 = d\sigma^2 + d\tau^2 \cdot \sin^2 i.$$

§. 5. Das Bogenelement $GG' = d\tilde{\sigma}$ (Fig. 30) der Gratlinie der

Fig. 30.

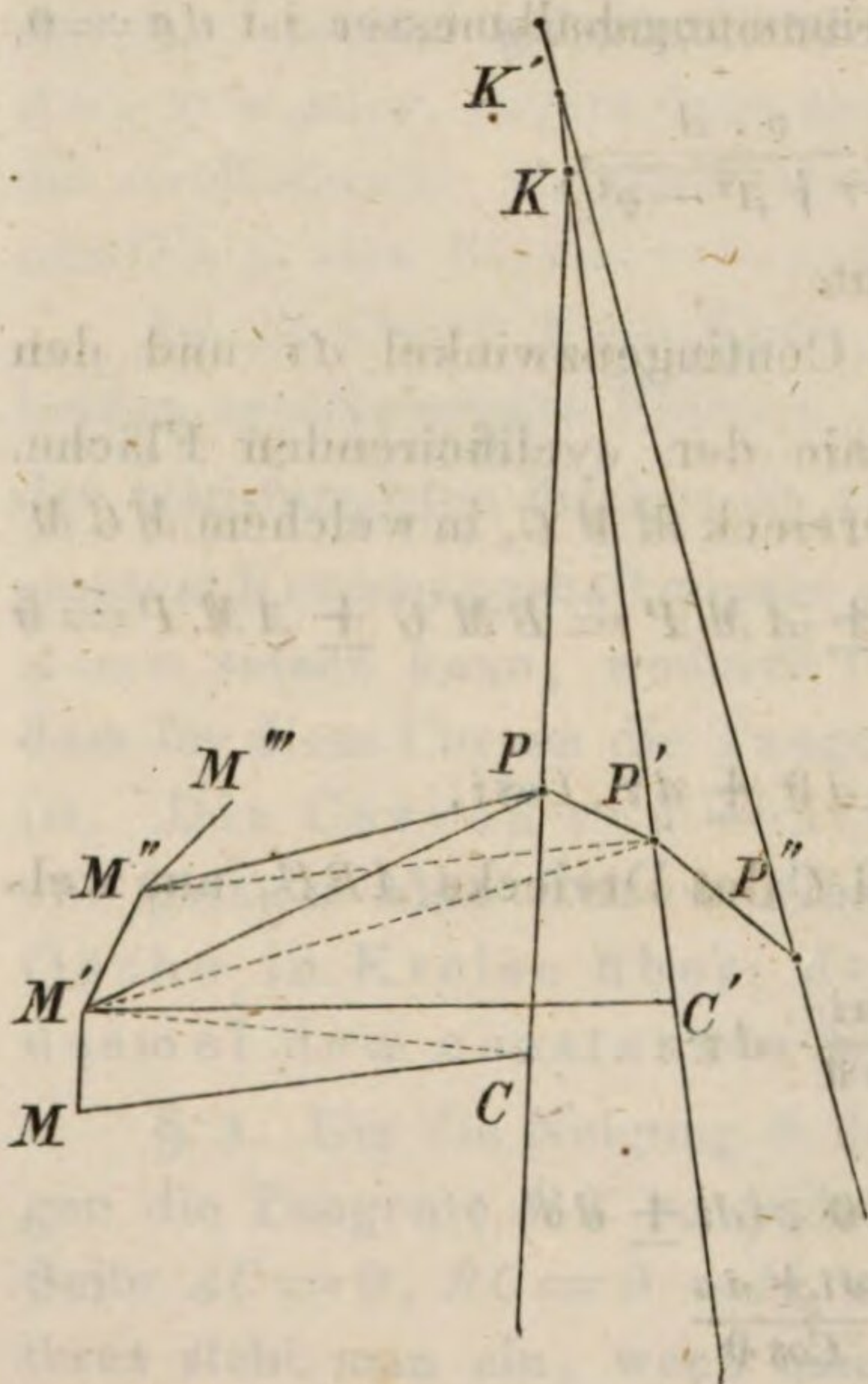


cyclificirenden Fläche ergibt sich folgendermassen. Es ist, wenn $M'Q$ senkrecht zu MG : $GG' = G'M' - GM' = G'M' - GQ = G'M' - (GM - MQ) = (G'M' - GM) + MQ = d(MG) + ds \cos \vartheta$. Daher wird, weil aus dem Dreieck $MG M'$ sofort MG gezogen werden kann, nämlich:

Fig. 31.

$$MG = \frac{ds}{d\tau} \cdot \sin \vartheta$$

$$d\tilde{s} = d\left(\frac{ds}{d\tau} \sin \vartheta\right) + ds \cdot \cos \vartheta.$$



§. 6. Die Gleichung $\cos i = \frac{\varrho}{R}$ liefert eine leichte Construction der cyclificirenden Ebene. Bestimmt man nämlich den Krümmungsmittelpunkt C und die Krümmungsaxe CK (Fig. 31) für den Punkt M der Curve und sucht auf der letzteren einen Punkt P , dessen Abstand PM von M gleich dem Radius A der Kreistransformation ist, so ist eine Ebene, welche durch P und die Tangente in M geht die eine und eine Ebene, welche durch dieselbe Tangente und den mit P symmetrisch gegen

den Krümmungsmittelpunkt C liegenden Punkt Q der Krümmungsaxe geht, die andere cyclificirende Ebene des Punktes M . Die Punkte P, Q sind zugleich (Cap. V. §. 10) die Mittelpunkte zweier Kugeln vom Radius A oder auch die Mittelpunkte zweier Kegel, welche die Curve in M in der zweiten Ordnung berühren. Die Folge der Punkte P und Q bildet also auf der Fläche der Krümmungsaxen die Orte der Mittelpunkte der Osculationskugeln für die Curve M vom Radius A .

Die beiden Curven P und Q haben sehr interessante Beziehungen zur Curve M . Sind nämlich $M, M', M'', M''', \dots$ und $P, P', P'', P''' \dots$ die Reihen entsprechender Punkte der Curven M und P , so ist

$$\begin{aligned} MP &= M'P = M''P = A \\ M'P' &= M''P' = M'''P' = A \\ M''P'' &= M'''P'' = M^{IV}P'' = A \end{aligned}$$

und daher auch

$$M''P = M''P' = M''P'' = A$$

d. h. es ist M'' der Mittelpunkt einer Kugel vom Radius A , welche durch die drei Punkte P, P', P'' geht und also die Curve P im Punkte P in der zweiten Ordnung berührt. Ebenso ist M''' Mittelpunkt einer Kugel von demselben Radius, welche die Curve P im folgenden Punkte P' osculirt u. s. w. Aehnliches gilt in Bezug auf die Curven M und Q . Daher liegt die Curve M auf der Fläche der Krümmungsaxen der Curven P und Q . d. h.:

Von den beiden Curven M und P (oder M und Q) ist jede der Ort der Mittelpunkte der Osculationskugeln vom constanten Radius A für die andere und liegt jede auf der Fläche der Krümmungsaxen der anderen.

Ferner hat PP' die Richtung einer Tangente an die Kugel um M'' , welche durch P, P', P'' geht und steht mithin senkrecht auf $M''P$, ebenso ist es aber Tangente an eine Kugel, welche durch den dem Punkte P vorhergehenden Punkt, durch P und P' gehen würde und ihren Mittelpunkt in M' hätte, daher steht PP' auch senkrecht auf $M'P$; folglich steht PP' auf der Ebene $M'PM''$ senkrecht. Diese Ebene ist aber cyclificirende Ebene in M' . Daher:

Die Tangente der Curve P (oder Q) steht senkrecht auf der cyclificirenden Ebene oder die cyclificirende Ebene ist die Normalebene der Curve P (oder Q).

Ebenso ist die cyclificirende Ebene von P Normalebene der Curve M . Es stehen also die Curven M, P in solcher Be-

ziehung, dass die Normalebene jeder durch die Tangente der andern geht, also ihre Normalebenen aufeinander senkrecht stehen und die Bogenelemente sich rechtwinklig kreuzen. In der That muss, wenn $M''P' = M'P$ sein soll, da beide Linien einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden, die eine die Projection der andern auf ihre Richtung sein.

Wickelt man die Fläche der Krümmungsaxen von M ab und denkt dabei die Punkte der Curve M in den Tangentenebenen der Fläche als fest, so gelangt bei diesem Vorgange M' nach M'' und es stehen P, P' von den vereinigten Punkten, nämlich von M'' um den Radius A ab. Hierauf gelangt M'' nach M''' und es stehen P', P'' also auch P, P', P'' von M''' um A ab; gelangt M''' nach M^{IV} , so folgt dass P, P', P'', P''' von diesem Punkte um dieselbe Strecke A abstehen u. s. f. Schliesslich erhält man einen Punkt, von welchem alle Punkte der Curven P gleichweit abstehen. Hieraus erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

Die Curve P (oder Q) der Osculationskugeln vom Radius A hat die Eigenschaft, dass sie durch Abwicklung der Fläche der Krümmungsaxen, auf welcher sie liegt in einen Kreis vom Radius A übergeht.

Construirt man daher zu der Curve P die Fläche ihrer Krümmungsaxen, so geht ebenso die Curve M , welche auf ihr liegt, in einen Kreis vom Radius A über; dasselbe geschieht, wenn man die Fläche der Krümmungsaxen der Curve Q abwickelt. Diese sind also die beiden cyclificirenden Flächen und die Curve ihr gemeinsamer Durchschnitt. Daher:

Die beiden cyclificirenden Flächen einer Curve M für den Radius A sind die Flächen der Krümmungsaxen der Curven P, Q , welche den Ort der Osculationskugelmittelpunkte vom Radius A für die Curve M bilden.

Hieraus folgt noch, dass die rectificirende Fläche einer Curve M die Fläche der Krümmungsaxen für den Ort der Mittelpunkte der Kugeln von unendlich grossem Radius (der Schmiegungebenen), d. h. die Fläche der Krümmungsaxen für die unendlich ferne Curve auf der Fläche der Krümmungsaxen von M ist.

§. 7. Die Curven der Mittelpunkte der Osculationskugeln von constantem Radius erlangen durch diese Betrachtungen eine auffal-

lende Bedeutung. Die §§. 3. 4. 5 liefern für sie den Contingenzwinkel und Schmiegunswinkel. Da nämlich die cyclificirende Fläche die Fläche der Krümmungsaxen für die Curve P ist, so ist der Contingenzwinkel der Curve P gleich dem Schmiegunswinkel der Gratlinie der cyclificirenden Fläche nämlich gleich

$$\sqrt{(di \pm d\sigma)^2 + d\tau^2 \sin^2 i}$$

und der Schmiegunswinkel ist gleich dem Contingenzwinkel derselben, nämlich gleich

$$d\vartheta \pm d\tau \cos i.$$

Das Bogenelement der Curve P ergibt sich so. Es ist

$$PP' : PK = \sin PKP' : \sin PP'K.$$

Nun wird aber $PP'K = CPP' - CKP'$ und es ist, weil PP' zu $M'P$ senkrecht ist, $CPP' = \frac{\pi}{2} - CPM' = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - PM'C) = PM'C = PMC = i$, mithin $PP'K = i - d\sigma$, weil $CKP' = d\sigma$. Daher wird jetzt

$$PP' : PK = \sin d\sigma : \sin(i - d\sigma)$$

oder

$$PP' = \frac{d\sigma}{\sin i} \cdot PK.$$

Ferner hat man $PK = Ck \mp CP$, je nachdem P der einen oder andern cyclificirenden Fläche entspricht, und wenn man $CK = h$, $CP = k$ setzt

$$PK = h \mp k$$

und daher

$$PP' = \frac{d\sigma}{\sin i} (h \pm k) = \frac{hd\sigma}{\sin i} \pm \frac{k d\sigma}{\sin i}.$$

Bedenkt man, dass

$$hd\sigma = d\varrho, \quad k = \sqrt{A^2 - \varrho^2}$$

ist, so erhält man für die Bogenelemente ds'' , ds''' der beiden Curven P , Q

$$ds'' = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}} - Ad\sigma$$

$$ds''' = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}} + Ad\sigma.$$

Addirt man diese Ausdrücke, so kommt noch

$$\frac{ds'' + ds'''}{2} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{A^2}}}$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{s'' + s'''}{2} = A \arcsin \left(\frac{\varrho}{A} \right) + \text{Const.}$$

§. 8. Für die Helix eines Kreiscylinders ist i sowie ϑ constant, nämlich

$$\cos i = \frac{\varrho}{A}, \quad \cos \vartheta = \frac{\varrho A}{r \sqrt{A^2 - \varrho^2}};$$

es bilden mithin die cyclificirenden Ebenen mit den Schmiegungebenen und in ihnen die cyclificirenden Geraden mit den Tangenten der Helix constanten Winkel. Da nun auch die Schmiegungeebene der Helix mit der Erzeugungslinie des Cylinders einen constanten Winkel bildet, nämlich den Winkel, unter welchem der Helix gegen die Erzeugungslinien des Cylinders geneigt ist, so folgt, dass die cyclificirenden Ebenen und in ihnen die cyclificirenden Geraden gegen die Erzeugungslinien des Cylinders ebenfalls constante Neigung haben. Hieraus ergibt sich weiter, dass die Punkte der Gratlinie der cyclificirenden Fläche von den Erzeugungslinien des Cylinders gleichen Abstand haben und folglich selbst wieder auf einem mit jenem concentrischen Cylinder liegen und dass die Tangenten der Gratlinie gegen die Erzeugungslinie dieses dieselbe constante Neigung haben. Daher ist die Gratlinie ebenfalls eine Helix und die cyclificirenden Flächen sind abwickelbare Helicoide.

§. 9. Die Gratlinien sämtlicher cyclificirender Flächen einer Curve bilden eine Fläche, welche symmetrisch getheilt wird durch die Fläche der Schmiegungebenen, nämlich durch die Tangentenfläche. Auf dieser Fläche sind die Gratlinie der rectificirenden Fläche und die Gratlinie derjenigen cyclificirenden Fläche, welche dem kleinsten Werth von A entspricht, bei welchem die Kreistransformation noch möglich ist, ausgezeichnete Linien.

§. 10. Das Problem der cyclificirenden Flächen ist einer Umkehrung fähig. Man kann nämlich die Aufgabe stellen: „auf einer abwickelbaren Fläche die Curven zu finden, welche durch Abwicklung der Fläche in einen Kreis von gegebenem Radius A transformirt werden.“ Hiebei sind alle Elemente $d\tilde{s}$, $d\tilde{\tau}$, $d\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varrho}$, u. s. w. der Gratlinie $GG'G''$... dieser Fläche als gegeben anzusehen. Nimmt man nun auf der Tangente des Punktes G einen Punkt M willkürlich an und zieht durch ihn in der Schmiegungeebene von G , nämlich in der Tangentenebene der Fläche eine Gerade, welche mit der Tangente einen willkürlichen Winkel macht, so können dieser Punkt und diese Gerade als die

Anfangselemente der Construction einer der gesuchten Curven angesehen werden. Die Gerade bestimmt nämlich auf der folgenden Tangente in G' einen zweiten Punkt M' und dadurch das Bogenelement und den Contingenzwinkel $d\tau_1$ der transformirten Curve vermöge der Bedingung $MM' = A \cdot d\tau_1$. Zieht man also die Gerade $M't$ durch M' in der Schmiegungeebene von G so, dass tM' mit dem verlängerten Bogenelemente MM' den Winkel $d\tau_1$ bildet, was auf zwei Arten geschehen kann, und legt durch tM' eine Ebene senkrecht zur Ebene $MM'G$, so bestimmt diese auf der folgenden Schmiegungeebene ein weiteres Bogenelement $M'M''$ und zugleich den Contingenzwinkel der Curve M . Durch Fortsetzung der Construction findet man den folgenden Werth von $d\tau_1$ und mit dessen Hülfe ein weiteres Bogenelement u. s. f.

Man ersieht hieraus, dass die Construction einer Curve auf einer abwickelbaren Fläche, welche durch deren Abwicklung in einen Kreis von gegebenem Radius übergeht, von zwei beliebig angenommenen Elementen, einem Punkte der Curve und der Tangente in ihm abhängt und dass durch jeden Punkt der Fläche zwei Curven der Art gehen.

Bezeichnen L und ϑ die Länge MG und den Winkel $M'MG$ für irgend eine Stelle der Curve M , so sieht man leicht, dass

$$d\tau_1 = (\vartheta + d\tilde{\tau}) - (\vartheta + d\vartheta) = d\tilde{\tau} - d\vartheta$$

$$ds = \frac{L}{\sin \vartheta} d\tilde{\tau}$$

und folglich die Bedingungsgleichung der Aufgabe ist:

$$\frac{L}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{\tau} - d\vartheta} = A$$

weiter erhellt aus §. 5 dass

$$dL = d\tilde{s} - ds \cos \vartheta = d\tilde{s} - L \cotg \vartheta \cdot d\tilde{\tau}$$

und dies sind die beiden simultanen Differentialgleichungen, mit Hülfe von deren Integration das Problem analytisch gelöst werden kann *).

Man findet noch

$$d\tau^2 = d\tau_1^2 + \sin^2 \vartheta d\tilde{\sigma}^2 = (d\tilde{\tau} - d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\tilde{\sigma}^2$$

*) Cf. Molins a. a. O. p. 283.

oder wenn man $d\tilde{\tau} = d\vartheta$ mit Hülfe der ersten der beiden vorigen Gleichungen eliminirt:

$$d\tau^2 = \frac{L^2}{A^2 \sin^2 \vartheta} \cdot d\tilde{\tau}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\tilde{\sigma}^2$$

und hiemit erhält man weiter für den Krümmungshalbmesser der gesuchten Curve

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{A^2} + \left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\tau}} \right)^2 \frac{\sin^4 \vartheta}{L^2}$$

oder wegen

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\tau}} = \frac{\tilde{\varrho}}{\tilde{r}}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{A^2} + \frac{\tilde{\varrho}^2}{\tilde{r}^2} \cdot \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{L} \right)^2$$

Cap. XI.

Die Evolutoiden.

§. 1. Zieht man durch die aufeinanderfolgenden Punkte $M, M', M'', \dots$ einer Curve Gerade, welche mit den Tangenten in diesen Punkten constanten Winkel α bilden und sich aufeinanderfolgend in den Punkten $N, N', N'', \dots$ schneiden, so bildet die Folge der Punkte N eine Curve, welche eine Evolutoide der Curve M genannt wird *). Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so geht die Evolutoide in eine Evolute über. Die Evoluten bilden also eine Species der Evolutoiden. Daher der Name.

Die Evolutoide ist die Gratlinie einer abwickelbaren Fläche, welche durch die Curve geht und deren Erzeugungslinien mit den Tangenten der Curve constanten Winkel bilden. Sobald dieser Winkel α und irgend eine Erzeugungslinie z. B. die durch den Punkt M gehende, gegeben sind, so ist diese Fläche und mit ihr die Evolutoide vollständig bestimmt. Ein und demselben Winkel α ent-

*) Cf. Lancret, Mém. sur les développoides des courbes planes, des courbes à double courbure, et des surfaces développables. Mém. prés. à l'Inst. T. II. p. 19.

sprechen aber unendlich viele Evolutoiden, denn man kann zur Anfangstangente derselben jeden Strahl eines geraden Kegels wählen, dessen Mittelpunkt in M liegt, dessen Axe die Tangente der Curve in diesem Punkte und dessen halbe Oeffnung gleich α ist. Es hängt daher die spezielle Evolutoide von zwei Bedingungen ab, von der Grösse des Winkels α und der Lage der Anfangstangente. Die sämtlichen Evolutoiden einer Curve bilden daher eine Doppelschaar. In dieser sind einzelne ausgezeichnete Schaaren enthalten, insbesondere die Schaar der Evoluten, entsprechend dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$; für $\alpha = 0$ reducirt sich die entsprechende Schaar auf die Curve selbst.

§. 2. Die sämtlichen einem bestimmten Winkel α entsprechenden Evolutoiden bilden eine krumme Fläche, die Evolutoidenfläche und die sämtlichen Evolutoidenflächen eine Flächenschaar, in welcher die Fläche der Krümmungsaxen als die Fläche der Evoluten enthalten ist. Lässt man den Winkel α continuirlich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so ändert sich die Evolutoidenfläche selbst continuirlich und geht schliesslich in ihre Grenze, die Fläche der Krümmungsaxen über.

§. 3. Jede einem bestimmten Winkel α entsprechende Evolutoidenfläche zerfällt in zwei Aeste. Denkt man sich nämlich den Kegel, auf welchem die Anfangstangenten aller Evolutoiden liegen, die dem Winkel α entsprechen, so bewegt, dass sein Mittelpunkt die Curve M beschreibt, und seine Axe stets Tangente dieser Curve bleibt, so liegen die sämtlichen dem Punkte M entsprechenden Punkte N aller dieser Evolutoiden auf der Durchschnittscurve der beiden unendlichnahen Kegel in M und M' ; ebenso die sämtlichen Punkte N' der Evolutoiden entsprechend dem Punkte M' auf dem Durchschnitt der Kegel in M' und M'' u. s. f. Es erzeugt daher die Durchschnittscurve zweier aufeinanderfolgender Kegel die Fläche der Evolutoiden, die Linie ist die Charakteristik und der Kegel die Erzeugungsfläche der Evolutoidenfläche, welche deren Enveloppe ist. Nun schneiden aber die beiden Flächentheile des Kegels in M die beiden Flächentheile des folgenden Kegels in M' in zwei distincten Curven, von denen jede bei der Bewegung des Kegels eine Fläche für sich beschreibt, welche ein Ort von Evolutoiden ist. Daher besteht der Gesamtorth aller Evolutoiden aus diesen beiden getrennten Flächenästen. Bloss für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ fallen diese beiden Flächenäste zusammen.

gegenüberliegende Seite TN fällt, $PN = T'N = \alpha$, mithin $TP = d\psi$ wird. Der Winkel NTT' aber ist gleich ϑ ; daher folgt aus dem unendlichkleinen Dreieck TPT' :

$$d\psi = d\tau \cdot \cos \vartheta.$$

Die beiden Punkte N liegen auch jetzt noch gleichweit ab von der Tangente in M und ihre Verbindungslinie ist daher auch jetzt noch parallel zu dieser. Sie liegen auch jetzt auf einem Kreise, welcher über der Sehne MM' den Peripheriewinkel $d\psi$ fasst und daher ist der Durchmesser dieses Kreises

$$\frac{MM'}{d\psi} = \frac{MM'}{d\tau} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta}$$

oder, weil $\frac{MM'}{d\tau}$ gleich dem Krümmungshalbmesser ϱ der Curve M ist

$$\frac{\varrho}{\cos \vartheta}.$$

Projicirt man sie auf die Tangente und Schmiegungeebene nach p und n , so wird ähnlich, wie vorher

$$MN = \frac{\varrho}{\cos \vartheta} \cdot \sin \alpha, \quad Np = \frac{\varrho}{\cos \vartheta} \cdot \sin^2 \alpha, \quad Mp = \frac{\varrho}{\cos \vartheta} \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

$$pn = Np \cdot \cos \vartheta = \varrho \sin^2 \alpha, \quad Nn = Np \cdot \sin \vartheta = \varrho \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sin^2 \alpha.$$

Hieraus ersieht man, dass die Projectionen der Punkte N auf die Schmiegungeebene mit den in dieser Ebene selbst liegenden Punkten N in eine Gerade fallen, welche der Tangente des Punktes M im Abstände $\varrho \sin^2 \alpha$ parallel läuft. Es liegen daher alle Punkte M , d. h. die sämtlichen Punkte der Durchschnittslinie der beiden Kegel in einer Ebene, welche auf dem Krümmungshalbmesser senkrecht steht und von der rectificirenden Ebene um die Strecke $\varrho \sin^2 \alpha$ entfernt ist. Daher ist diese Durchschnittslinie eine ebene Curve. Da aber die Ebene dieser Curve der Tangente in M , d. h. der Axe des Kegels in M parallel läuft, so ist sie eine Hyperbel.

Legt man durch die Tangente des Punktes M die beiden Ebenen, welche mit der Schmiegungeebene denselben Winkel ϑ bilden, so liefern sie vier Punkte N , welche paarweise symmetrisch gegen die Schmiegungeebene liegen. Hieraus folgt, dass die Durchschnittslinie der Ebene der Hyperbel mit der Schmiegungeebene die Hauptaxe dieser ist; wird sie mit $2A$ bezeichnet, so ist

$$A = \varrho \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ferner folgt, dass, weil die Ebene der Hyperbel mit der rectificirenden Ebene also auch mit den beiden Strahlen des Kegels in M

welche in diese fallen parallel ist, dass die Asymptoten der Hyperbel diesen Strahlen parallel sind, dass mithin der Asymptotenwinkel derselben 2α und die halbe Nebenaxe

$$B = A \operatorname{tg} \alpha = \varrho \sin^2 \alpha$$

ist.

Die sämtlichen Kreise, auf welchen die Punkte N liegen und deren Durchmesser die verschiedenen Werthe von $\frac{\varrho}{\cos \vartheta}$ haben, wenn ϑ bis 0 von 2π geht, erfüllen eine interessante Fläche. Die Mittelpunkte dieser Kreise fallen in die Normalebene und es haben die Endpunkte der Durchmesser vom Punkte M einen Abstand

$$\frac{\varrho}{\cos \vartheta}$$

daher ist ϱ ihre Projection auf der Schmiegungeebene und liegen sie alle in der Krümmungsaxe. Die Normalebene hat mit dieser Fläche nur die Krümmungsaxe und den Punkt M gemein, während jede Tangentenebene sie in einem Kreise schneidet; die Schmiegungeebene liefert den kleinsten dieser Kreise, die rectificirende den grössten nämlich den unendlichgrossen. Auf dieser Fläche liegt die Hyperbel, welche der Ort der Punkte N ist.

Auf dieser Fläche liegen aber auch alle andern Hyperbeln, welche den verschiedenen Werthen des Winkels α entsprechen, wie man daraus sieht, dass der Durchmesser der Kreise von α unabhängig ist. Die Fläche wird daher parallel der rectificirenden Ebene in Hyperbeln geschnitten und wenn α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ anwächst, so bewegt sich die Ebene eines solchen Schnitts von der rectificirenden Ebene der Curve M bis zur rectificirenden Ebene der Curve der Mittelpunkte ihrer Schmiegungekugeln und wächst der Asymptotenwinkel von 0 bis π . Die Hyperbel geht dabei continuirlich von der Tangente der Curve M durch alle Zwischenstufen hindurch in die Krümmungsaxe über.

§. 5. Jede Evolutoide ist eine kürzeste Linie auf der Evolutoidenfläche. Es ist nämlich die Evolutoide die Gratlinie einer abwickelbaren Fläche, deren Erzeugungslinien mit den Tangenten der Curve constanten Winkel bilden. Daher ist die Ebene zweier aufeinanderfolgender Erzeugungslinien die Schmiegungeebene der Evolutoide. Sie geht aber durch die Tangente und steht folglich auf der Tangentenebene des geraden Kegels senkrecht, dessen Axe die Tangente ist und auf welchem die Tangente der Evolutoide liegt. Nun schneidet sich dieser Kegel mit dem ihm unmittelbar vorherge-

henden und dem ihm unmittelbar folgenden Kegel in zwei Hyperbeln, welche eine unendlich schmale Zone bestimmen, welche der Kegel mit der Evolutoidenfläche gemein hat. Längs dieser Zone haben beide Flächen, der Kegel und die Evolutoidenfläche gemeinschaftliche Tangentenebene und auf dieser Zone liegt das Curvenelement der Evolutoide, deren Schmiegungeebene senkrecht auf der Tangentenebene des Kegels steht. Diese Ebene steht daher auch senkrecht auf der Tangentenebene der Evolutoidenfläche und die Normale dieser ist also ihre Hauptnormale; daher ist die Evolutoide eine kürzeste Linie auf der Evolutoidenfläche. (Cap. IV. §. 3. Anm.)

Jede Evolutoide ist daher auch eine Curve, längs welcher ein über die Evolutoidenfläche frei hingespannter Faden ohne Reibung im Gleichgewichte sich befindet. Befestigt man daher im Punkte M der Curve einen Faden und spannt ihn über den Kegel in M hin bis zu einem Punkte N der Hyperbel, welche die Charakteristik der Evolutoidenfläche ist, und längs welcher der Kegel diese Fläche berührt und führt ihn dann frei über die Fläche hin, so zeichnet er auf dieser die durch N gehende Evolutoide der Curve M . Zieht man also nach allen Punkten N der Charakteristik solcher Fäden, so erhält man alle Evolutoiden, welche demselben Winkel α entsprechen.

§. 6. Auf der Evolutoidenfläche gibt es zwei besonders ausgezeichnete Curven, nämlich die Curve der Scheitel und die Enveloppe aller Hyperbeln. Keine von beiden ist eine Evolutoide. Um dies für die Curve der Scheitel zu erweisen, genügt es zu bemerken, dass zwei aufeinanderfolgende Linien $MC, M'C'$, welche die Punkte M, M' der Curve mit den ihnen entsprechenden Scheiteln C, C' verbinden in den Schmiegungeebenen von M und M' liegen und sich also, wenn sie sich schnitten, nur auf der Durchschnittsebene dieser Ebenen, nämlich der Tangente schneiden könnten, was nicht möglich ist, da die Punkte M, M' verschiedene Punkte sind. Es berühren folglich die Linien $MC, M'C'$ keine Curve, also auch nicht die Curve der Scheitel, mithin ist diese auch keine Evolutoide. Bloss der Fall, dass die Curve M eben ist, macht eine Ausnahme; dann ist nämlich die Curve der Scheitel eine Evolutoide; sie ist die Durchschnittslinie der Ebene der Curve mit der Evolutoidenfläche und um sie gruppieren sich die Evolutoiden symmetrisch zu beiden Seiten der Curvenebene, welche folglich eine Symmetrieebene der Evolutenfläche wird.

Um die Behauptung für die Enveloppe der Hyperbeln zu er-

weisen, ziehen wir von dem Punkte M' nach irgend einem Punkte N der Hyperbel, welche den Durchschnitt des Kegels in M mit dem Kegel in M' darstellt und verlängern diese Linie bis zum Durchschnitt N' mit der nächsten Hyperbel, in welcher sich der Kegel in M' mit dem folgenden schneidet. Dann ist NN' das Element einer Evolutoide. Ist nun aber N ein Punkt K der Enveloppe der Hyperbeln, so ist er Durchschnittspunkt jener beiden Hyperbeln und es fällt N' mit ihm zusammen und das Element NN' verschwindet. Eine Linie von M' nach dem nächsten Punkte K' der Enveloppe fällt daher nicht mit $M'K'$ zusammen, also mit MK nicht in dieselbe Ebene, also schneiden sich MK , $M'K'$ nicht und die Curve $KK' \dots$ ist folglich keine Evolutoide, auch dann nicht, wenn die Curve M eben ist.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht die Curve der Scheitel in die Curve der Krümmungsmittelpunkte und die Enveloppe der Hyperbeln in den Ort der Mittelpunkte der Schmiegunskugeln über.

Es ist leicht, den Winkel dk zu bestimmen, welchen die Strahlen MC , $M'C'$, welche nach den Scheiteln zweier Hyperbeln gehen, zu bestimmen. Projicirt man nämlich die Linie $M'C'$, welche in der Schmiegungebene des Punktes M' liegt, auf die Schmiegungebene des Punktes M und ist $M'\gamma'$ diese Projection, so bilden diese beiden Linien miteinander einen Winkel $d\sigma \cdot \sin \alpha$, eine dritte Linie $M'\gamma$, welche man durch M' parallel MC zieht, bildet mit $M'\gamma'$ den Contingenzwinkel $d\tau$ und mit $M'C'$ den gesuchten Winkel dk . Daher folgt aus der unendlich kleinen an der Kante $M'\gamma'$ rechtwinkligen Ecke dieser drei Linien:

$$dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2 \cdot \sin^2 \alpha;$$

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhält man hieraus den Lancret'schen Satz Cap. II, §. 10.

Die Scheitelstrahlen MC erzeugen eine windschiefe Fläche, welche für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die Fläche der Hauptnormalen übergeht.

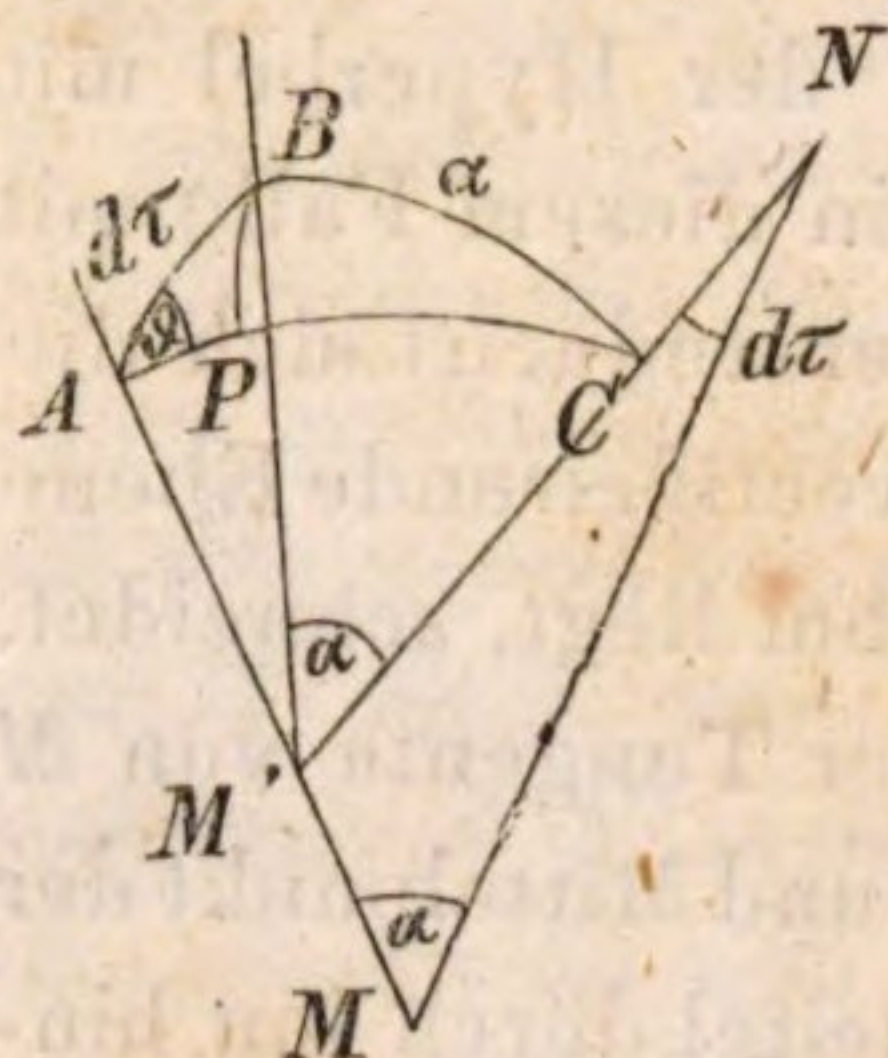
§. 7. Durch jeden Punkt der Evolutoidenfläche geht eine einzige Evolutoide, denn dieser Punkt liegt auf der Durchschnittsline zweier Kegelflächen, also gehen nach ihm zwei Strahlen dieser Kegel, von denen der eine bereits genügt, um die Evolutoide vollständig zu bestimmen. Daher geht auch durch jeden Punkt der Scheitelcurve eine Evolutoide, daher wird diese von allen Evolutoiden getroffen. Nur wenn die Curve eben ist, ist die Scheitelcurve selbst Evolutoide und haben die übrigen mit ihr keinen Punkt gemein, sondern nähern sich ihr asymptotisch. Ebenso trifft jede Evolutoide die Enveloppe der Hyperbeln in einem Punkte.

Wenn die Curve M die Fläche der Evolutoiden im Punkte M schneidet, so ist dieser Punkt ein Punkt der Durchschnittslinie des Kegels in M mit dem folgenden Kegel, nämlich ein Punkt der charakteristischen Hyperbel. Nun läuft die Ebene der Hyperbel mit der rectificirenden Ebene parallel und fällt also in diesem Falle mit der rectificirenden Ebene selbst zusammen; daher reducirt sich die Hyperbel auf die beiden Geraden, in welchen die rectificirende Ebene dieses Punktes den Kegel, dessen Mittelpunkt in ihm liegt, schneidet, nämlich auf die beiden Geraden, welche mit der Tangente von M gleiche Winkel α bilden. Dieser Punkt ist Scheitel und Mittelpunkt der Hyperbel zugleich, mithin geht die Curve der Scheitel durch ihn hindurch. Da die Tangenten der Evolutoiden die Strahlen des erzeugenden Kegels sind und alle durch diesen Punkt gehen, so gehört er zugleich allen Evolutoiden gemeinschaftlich an. In ihm stossen die beiden Flächenäste zusammen, welche den Ort der Evolutoiden bilden.

§. 8. Die sämtlichen Evolutoiden einerseits und die sämtlichen charakteristischen Hyperbeln andererseits bilden zwei Systeme von Curven auf der Evolutoidenfläche, welchen hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage eine ausgezeichnete Eigenschaft zukommt. Zieht man nämlich längs einer Curve des einen Systems in allen Punkten, in welchen sie von den Curven des andern Systems geschnitten wird, Tangenten an die letzteren, so bilden diese eine abwickelbare Fläche. Ist nämlich die Curve eine aus dem System der Hyperbeln, so sind die Curven, welche sie schneiden, die Evolutoiden und ihre Tangenten sind die Strahlen des Erzeugungskegels, auf welchem die Hyperbel liegt und dieser Kegel ist jene abwickelbare Fläche. Ist aber die Curve eine Evolutoide, so sind die Curven des andern Systems Hyperbeln und die Tangente an eine solche Hyperbel ist der Durchschnitt zweier Tangentenebenen der Kegel, welche sich in der Hyperbel schneiden. Diese Tangenten sind also die Durchschnitte einer continuirlichen Folge von Ebenen und erzeugen mithin eine abwickelbare Fläche. Wickelt man diese Fläche ab, so geht die Evolutoide in eine Gerade über, denn die abwickelbare Fläche berührt die Evolutoidenfläche längs dieser Evolutoide, und diese ist auf der Evolutoidenfläche kürzeste Linie; daher ist sie auch auf der umschriebenen abwickelbaren Fläche kürzeste Linie und geht mithin bei der Abwicklung dieser in eine Gerade über. Diese abwickelbare Fläche ist daher die rectificirende Fläche der Evolutoide und ihre Tangentenebenen stehen als rectificirende Ebenen senkrecht auf den Schmiegungebenen der Evolutoide.

§. 9. Den Contingenzwinkel $d\tau_1$ einer Evolutoide haben wir bereits §. 4 bestimmt; er ist nämlich $d\tau_1 = d\psi = d\tau \cdot \cos \vartheta$ wenn ϑ

Fig. 34.



den Neigungswinkel der Schmiegungeebene der Evolutoide gegen die Schmiegungeebene der Curve bedeutet. Er ist unabhängig von α , mithin für alle Evolutoiden, die den verschiedenen Werthen von α bei demselben Werthe von ϑ entsprechen, derselbe. (S. Cap. IV, §. 10.) Den Schmiegungewinkel $d\sigma_1$ der Evolutoide erhalten wir aus dem sphärischen Dreieck ABC Fig. 34, welche übereinstimmt mit den Figuren von Cap. X, §. 1 und Cap. III, §. 4 und 7, in welchem $C = d\sigma_1$ ist, nämlich

$$d\sigma_1 = \frac{d\tau}{\sin \alpha} \cdot \sin \vartheta.$$

Das Verhältniss beider und mithin das Verhältniss der beiden ersten Krümmungen der Evolutoide ist demnach

$$\frac{d\tau_1}{d\sigma_1} = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Aus dem Contingenzwinkel und dem Schmiegungewinkel der Evolutoide erhält man für den Winkel dk_1 der ganzen Krümmung:

$$dk_1^2 = d\tau^2 \left\{ \cos^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{\sin^2 \alpha} \right\}.$$

Für das Bogenelement ds_1 der Evolutoide erhält man, wenn $MN = L$ gesetzt wird

$$ds_1 = dL - ds \cos \alpha$$

und weil

$$L = \sin \alpha \cdot \frac{ds}{d\tau_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \vartheta} \cdot \frac{ds}{d\tau}$$

so wird

$$ds_1 = \sin \alpha \, d \left(\frac{ds}{d\tau \cos \vartheta} \right) - ds \cos \alpha.$$

Auch kann man leicht den Winkel α durch $d\vartheta$, $d\sigma$, $d\tau$ etc. ausdrücken. Es ist nämlich, wenn $\sphericalangle PBC = \lambda$, $BP = i$ gesetzt wird, (S. Cap. III, §. 7.)

$$\vartheta + d\vartheta \pm d\sigma - \vartheta = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

folglich

$$d\vartheta \pm d\sigma = \cos \lambda.$$

Nun ist aber in dem Dreieck PBC

$$\cos \lambda = \operatorname{Cotg} \alpha \cdot \operatorname{tg} i = \operatorname{Cotg} \alpha \cdot i = \operatorname{Cotg} \alpha \cdot d\tau \sin \vartheta,$$

mithin

$$\operatorname{Cotg} \alpha = \frac{d\vartheta + d\sigma}{d\tau \sin \vartheta}.$$

§. 10. Das Problem der Evolutoiden ist einer Umkehrung fähig. Mann kann verlangen, die sämtlichen Curven anzugeben, für welche eine gegebene Curve N Evolutoide ist. Solche Curven stehen zu der Evolutoide in einer ähnlichen Beziehung, wie die Evolventen zu der Evoluten, daher mögen sie Evolventoiden heissen. Da die Tangente der Evolutoide mit der Tangente, der sie als Evolutoide angehört, einen constanten Winkel bildet, so sieht man ein, dass die Evolvententoiden einer Curve alle auf der Tangentenfläche derselben liegen und diejenigen Curven sind, welche die Tangenten unter constantem Winkel α schneiden *). So wie wir aber bei den Evolventen zwischen Filarevolventen und Planevolventen unterschieden haben, so macht sich auch hier ein analoger Unterschied geltend. Die Curven, die wir eben Evolventoiden nannten, entsprechen den Filarevolventen. Nun bilden die Schmiegungebenen der Planevolventen mit den Schmiegungebenen der primitiven Curve rechte Winkel, daher wird man passend die Curven, deren Schmiegungebenen mit den Schmiegungebenen einer gegebenen Curve constanten Winkel bilden **), Planevolventoiden nennen und jene ersteren Evolventoiden mit dem Namen der Filarevolventoiden belegen. Wir wollen hier die Theorie dieser von einer Curve abgeleiteten Curvensysteme nicht weiter verfolgen.

Wir haben in der vorliegenden Schrift die allgemeine Betrachtung der Curven bis zu den Elementen der dritten Ordnung fortgeführt. Die innigste Berührung, welche wir zwischen Curven und Flächen untersuchten, war von der dritten Ordnung, nämlich die zwischen der Curve, ihrer Schmiegunungskugel und ihrem Schmiegungskegel. Es ist leicht anzudeuten, welchen Weg die allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung ferner betreten und welche Probleme sie zunächst lösen muss. Die Kugel und der Kegel sind

*) Cf. Molins, sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure. Journ. des Mathem. T. VIII. p. 132.

**) Cf. Molins, Note sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées. Journ. des Math. T. XII. p. 394.

spezielle Flächen der zweiten Ordnung. Die allgemeine Fläche zweiter Ordnung ist durch neun Punkte bestimmt, und kann also eine Curve doppelter Krümmung höchstens in der achten Ordnung berühren. Die Construction einer solchen Schmiegungsfläche zweiter Ordnung ist schwierig und scheint noch Niemanden gelungen zu sein. Selbst die Berührung einer Curve mit solchen Flächen zweiter Ordnung, welche nicht den höchsten Grad der Innigkeit der Berührung erreichen können, wie z. B. die Berührung mit dem allgemeinen Cylinder zweiten Grades ist noch nicht abgeschlossen. Wie wünschenswerth Untersuchungen über solche Gegenstände sind, wird klar, wenn man bedenkt, dass die Lösung des allgemeinen Problems der Berührung einer Curve mit einer Fläche zweiter Ordnung eine neue Eintheilung der Curven in solche, für welche diese Berührungsfläche eine geradlinige Fläche ist und für welche sie dies nicht ist und im letztern Falle eine Unterabtheilung in solche Curven, für welche sie ein Ellipsoid oder ein doppeltes Hyperbeloid ist, liefern muss. Wir hoffen in nächster Zeit zur Lösung dieser interessanten Fragen einige Beiträge liefern zu können.

Verbesserungen:

- S. 13. Z. 9 v. u. lies „Tangente“ statt „Tangenten“
S. 16. Z. 3 v. u. „ „abwickelbaren“ statt „abgewickelten“
S. 23. Z. 10 lies „Maass der ganzen Kr.“ statt „Maass der Kr.“

Schell, Wilhelm,

Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer
Darstellung

Leipzig 1859

Math.p. 493 lc

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082724-6